Lehrbuch

der

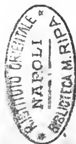
Elementar-Mathematik.

Für die
Portepeefähnrichs-Prüfung in der Königlich Preußischen
Armee und Eintritts-Prüfung in der Kgl. Preuß. Marine

bearbeitet

von

F. Baron Haller von Hallerstein,
Oberst z. D.



Erster Theil. Arithmetik.



Siebente Auflage.



Berlin, 1870.
Verlag von Albert Nauck & Comp.

Vorrede zur ersten Auflage.

Von der General-Inspektion des Militair-Unterrichts- und Bildungs-Wesens der Armee erhielt der Verfasser den ehrenvollen Auftrag, ein Lehrbuch der Elementar-Mathematik zu schreiben, innerhalb der Grenzen, welche durch die Allerhöchsten Verordnungen vom 3. und 4. Februar 1844 für die Eintritts- oder Portepeefähnrichs-Prüfung in der Preußischen Armee festgesetzt sind. Die demselben dabei vorgezeichneten Zwecke sind in Kurzem folgende:

Die genannte Verordnung giebt nur in allgemeinen Umrissen diejenigen größeren Abschnitte der Mathematik an, auf welche sich die Eintritts-Prüfung erstrecken soll. Bei dem großen Gebiete dieser Wissenschaft, welches früher behufs der Eintritts- und Offizier-Prüfung in zwei Theile zerfiel, erscheint es nothwendig, die Forderungen innerhalb der gesteckten Grenzen nicht allzuweit auszudehnen, vielmehr alle diejenigen Sätze und Theorien fortzulassen, welche zu einer möglichst wissenschaftlichen Begründung des Systems der Mathematik nicht unbedingt nothwendig erscheinen, z. B. den binomischen Lehrsatz mit seinen Anwendungen, die Progressionen höherer Ordnung, die Entwickelung der Logarithmen durch Reihen, die diophantischen Gleichungen u. s. w. Es soll demnach das Werk

1) den bei den verschiedenen Divisionen angestellten Examinatoren genau angeben, welches das Maximum der Anforderungen in der Mathematik innerhalb der gesteckten Grenzen ist.

Früher fand der Unterricht in dieser Wissenschaft, den erlassenen Instruktionen gemäß, gleichmäßig auf den Divi-

sions=Schulen statt, und es war daher jeder Examinand mit den an ihn zu machenden Anforderungen genau bekannt. Da nun aber jetzt in keiner Unterrichtsanstalt eine specielle Vorbereitung für diese Prüfung existirt, so soll dies Buch

2) den Militäir=Aspiranten genauer, als es durch die Allerhöchste Verordnung geschehen konnte, die Ausdehnung derjenigen Anforderungen bezeichnen, welche künftig bei der Prüfung an sie gemacht werden müssen.

In den verschiedenen Lehranstalten wird ferner der Unterricht in der Mathematik, den besonderen Zwecken derselben entsprechend, ganz verschieden ertheilt; es kann bei der beschränkten Stundenzahl oft nicht die gehörige Sorgfalt auf die Einübung des Erlernten verwendet werden, so daß nur die talentvolleren Schüler den Unterricht gehörig verarbeiten und sich die in kurzer Zeit vorgetragenen Lehren gänzlich aneignen können, während die Minderbefähigten häufig schon früh die Lust für diese Disciplin gänzlich verlieren und daher später nur höchst Mittelmäßiges leisten. Hieraus ist erklärlich, daß die meisten jungen Leute, welche sich dem Militairstande widmen und die Eintritts=Prüfung bestehen wollen, gezwungen sind, sich die fehlenden Kenntnisse entweder durch kostspieligen Privat=Unterricht oder durch Selbststudium zu erwerben. Da aber nicht jeder die Mittel und die Gelegenheit besitzt, sich den ersteren zu verschaffen, so soll dies Werk

3) den Offizier=Aspiranten die Möglichkeit gewähren, sich durch Selbststudium die fehlenden Kenntnisse in der Mathematik aneignen zu können.

Zu einem derartigen Selbststudium wird aber gewiß Jeder, welcher schon mehrere Jahre dem Unterricht in den höheren Lehranstalten beigewohnt hat, besonders aber der in formaler Bildung schon vorgeschrittene Sekundaner, befähigt sein.

Wegen der außerordentlichen Wichtigkeit der Stereometrie für einen großen Theil der dem Offizier unentbehrlichen Wissenschaften, besonders für die Waffenlehre, die Fortifikation, das Terrainzeichnen und Aufnehmen, erhielt

der Verfasser den Auftrag, die Elemente der Körperlehre in einem Anhange mit aufzunehmen. Demgemäß wird dann auch dies Werk

4) dem schon in die Armee getretenen jungen Manne die Möglichkeit gewähren, sich die unentbehrlichsten Gesetze dieses Theiles der Mathematik anzueignen, um den Vorträgen auf den Divisionsschulen besser, als es ohne Kenntniß derselben möglich ist, folgen zu können.

Endlich stimmen die Anforderungen, welche, dem Regulativ vom 14. November 1835 zufolge, an die das Oberförster-Examen ablegenden Forstkandidaten gemacht werden sollen, mit den in diesem Buche vorgetragenen Lehren vollständig überein, und somit möchte dasselbe vielleicht

5) denjenigen Forstkandidaten nicht unwillkommen sein, welche sich zur Ablegung des Oberförster-Examens vorbereiten wollen.

Den genannten Zwecken entsprechend, hat das Buch die nöthige Einrichtung erhalten. Es sind nur die wichtigsten Sätze darin aufgenommen, aber mit möglichster Deutlichkeit so vorgetragen worden, daß Jeder, auch ohne Anleitung eines Lehrers, dieselben zu verstehen im Stande sein wird. Es sind ferner einem jeden einzelnen Abschnitte die nöthigen Uebungsaufgaben mit Angabe der Resultate hinzugefügt worden, einmal, um die Anschaffung einer Beispiel-Sammlung entbehrlich zu machen, dann aber auch, um den Lernenden zweckmäßige Beispiele zur Einübung der vorgetragenen Lehren zu geben.

In wiefern der Verfasser die genannten Zwecke bei Abfassung dieser Schrift erreicht habe, wagt er nicht zu bestimmen; doch hofft er, daß Jeder, welcher die Schwierigkeiten kennt, mit denen man bei einer solchen Arbeit zu kämpfen hat, nachsichtig in der Beurtheilung derselben sein werde.

Berlin, im Juli 1846.

Vorrede zur siebenten Auflage.

In dieser neuen Auflage ist, ebenso wie in den früheren, der ursprüngliche Zweck dieses Lehrbuches dahin erweitert worden, daß dasselbe auch den für die Prüfungen in der Königlichen Marine festgestellten Anforderungen entspricht, auch sind die vom Professor an der Königlichen Marineschule zu Kiel, Herrn Dr. Ligowski, bearbeiteten Anwendungen auf nautische Astronomie mit den nöthigen Verbesserungen wieder hinzugefügt worden, so daß dies Werk auch den Seeoffizier-Aspiranten als Grundlage für ihr Studium dienen soll.

Die jedem Abschnitte angehängten zahlreichen Uebungsbeispiele sind zweckmäßig erneuert und vielfach vermehrt worden. Dieselben haben dadurch eine gänzliche Umarbeitung erfahren müssen, daß sämmtliche Abmessungen nach der neuen Maaß- und Gewichtsordnung für den norddeutschen Bund, welche im Auszuge dem Lehrbuche angehängt ist, angenommen worden sind.

Berlin, im Dezember 1869.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Allgemeine Einleitung 1

Erster Theil.

Arithmetik oder Zahlenlehre.

Einleitung. Von den Zahlen und den Verbindungen, in welche sie treten können, im Allgemeinen 3

Erster Abschnitt.

Die Zahlenverbindungen der ersten Art.

Erstes Kapitel. Gesetze der Addition und Subtraktion im Allgemeinen 6

Zweites Kapitel. Erweiterte Auffassung der Gesetze der Addition und Subtraktion. Specielle Zahlformen, welche sich daraus ergeben 12

Drittes Kapitel. Die algebraischen Summen, das Einschließen in Klammern und das Auflösen derselben. . . 17

Uebungen zum ersten Abschnitt 20

Zweiter Abschnitt.

Die Zahlenverbindungen der zweiten Art.

Erstes Kapitel. Gesetze der Multiplikation und Division im Allgemeinen 21

Zweites Kapitel. Erweiterte Auffassung der Gesetze der Multiplikation und Division. Specielle Zahlformen, welche sich daraus ergeben 32

Drittes Kapitel. Gesetze der Multiplikation und Division mit der Null, den positiven und negativen Zahlen und algebraischen Summen 35

Dritter Abschnitt.

Begriff der reellen Zahlen. Vergleichung derselben in Bezug auf ihre Größe. Die reelle Zahlenreihe 40

Uebungen zum zweiten Abschnitt 42

Vierter Abschnitt.

Allgemeine Gesetze der Potenzirung 46

Uebungen zum vierten Abschnitt 52

Fünfter Abschnitt.

Von den numerischen Zahlen.

Erstes Kapitel. Eintheilung der numerischen Zahlen. Zahlensysteme. Die vier Species der gemeinen Rechenkunst . . 55

Zweites Kapitel. Von den einfachen und zusammengesetzten Zahlen 60

Drittes Kapitel. Von den zehntheiligen oder Decimalbrüchen 70

Viertes Kapitel. Von den Kettenbrüchen 78

Uebungen zum fünften Abschnitt 85

Sechster Abschnitt.

Von den Wurzeln, gebrochenen und negativen Potenzen.

	Seite
Erstes Kapitel. Allgemeine Gesetze der Radicirung (Wurzelausziehung)	95
Zweites Kapitel. Erweiterte Auffassung der Gesetze der Potenzirung und Radicirung. Specielle Zahlformen, welche sich daraus ergeben	99
Drittes Kapitel. Das Quadriren und Cubiren, sowie das Ausziehen von Quadrat- und Cubikwurzeln aus algebraischen Summen	107
Viertes Kapitel. Das Quadriren und Cubiren, sowie das Ausziehen von Quadrat- und Cubikwurzeln aus ganzen Zahlen, gewöhnlichen und Decimalbrüchen	112
Fünftes Kapitel. Das Rechnen mit negativen und gebrochenen Potenzen, sowie mit irrationalen und imaginären Wurzeln	124
Uebungen zum sechsten Abschnitt	133

Siebenter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

Erstes Kapitel. Allgemeine Gesetze der Logarithmirung	144
Zweites Kapitel. Von den gemeinen Logarithmen	150
Uebungen zum siebenten Abschnitt	157

Achter Abschnitt.

Von den Bestimmungs-Gleichungen.

Erstes Kapitel. Von den Gleichungen im Allgemeinen und von den einfachen Gleichungen mit einem Unbekannten	161
Zweites Kapitel. Von den einfachen Gleichungen mit mehreren Unbekannten	166
Drittes Kapitel. Von den Gleichungen des zweiten Grades	172
Viertes Kapitel. Von den Proportionen	181
Fünftes Kapitel. Von den logarithmischen Gleichungen	188
Uebungen zum achten Abschnitt	191

Neunter Abschnitt.

Von den Progressionen.

Erstes Kapitel. Von den arithmetischen Progressionen	217
Zweites Kapitel. Von den geometrischen Progressionen	224
Uebungen zum neunten Abschnitt	228

Anhang.

Die allgemeine Größenlehre oder die Lehre von den benannten Zahlen	232
Uebungen zur Lehre von den benannten Zahlen	257
Auszug aus dem Gesetz vom 17. August 1868, betreffend die Maaß- und Gewichts-Ordnung für den Norddeutschen Bund	283

Allgemeine Einleitung.

1) Der Begriff der Zahl ist ein einfacher Begriff und uns gegeben, mit ihm die Begriffe des Einfachen und Vielfachen.

Spricht man von einer bestimmten Menge von Dingen, z. B. von 3 Bäumen, so sind es nicht die drei Bäume selbst, welche man unter dem Begriff einer Zahl versteht, es ist vielmehr nur die von dem Begriff eines Baumes ganz unabhängige Anzahl derselben, die ebenso gut auch mit dem Begriff eines andern Gegenstandes, z. B. eines Hauses, zu drei Häusern zusammengesetzt werden könnte.

2) Die so aufgefaßte Zahl, welche nur eine Menge von Sachen anzeigt, die Sache selbst aber ganz unbestimmt läßt, nennt man eine abstrakte oder unbenannte Zahl. Die ersten Zahlen werden durch folgende Zeichen ausgedrückt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und der Reihe nach ausgesprochen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.

3) Fügt man zu einer Zahl eine Benennung, so entsteht eine benannte Zahl, z. B. 3 Thaler. Bei dieser hat man es nun nicht mehr mit der unbenannten Zahl 3, sondern zugleich auch mit derjenigen Sache, hier Thaler, zu thun, von welcher 3 die Menge bezeichnet.

4) Jedes Ding, welches an sich schon durch eine benannte Zahl ausgedrückt ist, z. B. 3 Thaler, oder doch als eine solche dargestellt werden kann, z. B. eine Summe Geldes, nennt man eine Größe. Will man daher untersuchen, ob irgend etwas zur Klasse der Größen gehört oder nicht, so hat man nur zu ermitteln, ob sich dasselbe, wenn es nicht schon als benannte Zahl gegeben ist, doch durch eine solche ausdrücken läßt. Hierzu bedarf man aber einer andern Größe, mit welcher man die zu untersuchende Sache mißt, welche man die Einheit oder das Gemäß nennt, und einer der oben betrachteten unbenannten Zahlen, welche

die Anzahl der Einheiten angiebt, die in der zu untersuchenden Sache enthalten sind. Diese sich als Resultat beim Messen ergebende unbenannte Zahl nennt man das Maaß dieser Größe in Bezug auf die gewählte Einheit.

Eine Summe Geldes ist mithin eine Größe, denn sie läßt sich durch eine benannte Zahl, vielleicht durch 3 Thaler, ausdrücken. Dann ist ein Thaler die Einheit oder das Gemäß, und die unbenannte Zahl 3 das Maaß dieser Größe in Bezug auf die Einheit ein Thaler. Aendert sich die Einheit, so ändert sich natürlich auch das Maaß, so kann man die obige Größe auch durch die benannte Zahl neunzig Silbergroschen ausdrücken.

Es folgt hieraus, daß jede Sache eine Größe ist, für welche es eine Einheit giebt, mit welcher man dieselbe wirklich messen kann. Dagegen gehört der weiter unten im zweiten Theile definirte mathematische Punkt nicht zu den Größen, weil für denselben, da er keine Ausdehnung besitzt, keine Einheit existirt; ebenso ist auch eine unbegrenzte gerade Linie keine Größe, weil es für dieselbe wohl eine Einheit, z. B. 1 Fuß, aber, ihrer unendlichen Länge halber, kein Maaß giebt.

5) Die unbenannte Zahl wird also, der obigen Erklärung nach, nicht zu den Größen gerechnet, sie bietet vielmehr nur ein Mittel dar, die Größen mit einander vergleichen zu können.

6) Die Mathematik ist diejenige Wissenschaft, welche sich mit der Vergleichung der Größen beschäftigt. Sie zerfällt in zwei Haupttheile, nämlich:

I. in die Arithmetik oder Zahlenlehre, welche sich nur mit den unbenannten Zahlen beschäftigt und zugleich die Grundlage der ganzen Wissenschaft bildet; und

II. in die Größenlehre, welche die Beziehungen der Größen unter sich betrachtet und dabei die Zahlenlehre voraussetzt.

Die Größenlehre zerfällt wieder:

a. in die allgemeine Größenlehre, welche dasjenige in sich begreift, was von allen Größen ohne Unterschied gilt, und

b. in die besondere Größenlehre, welche sich mit Größen besonderer Art beschäftigt. Der wichtigste Theil derselben ist die Raumgrößenlehre oder Geometrie.

Erster Theil.
Arithmetik oder Zahlenlehre.

Einleitung.

Von den Zahlen und den Verbindungen, in welche sie treten können, im Allgemeinen.

1) Da man eine jede Zahl durch wiederholtes Nehmen der Eins entstanden denken kann, so bildet die Eins die Einheit aller unbenannten Zahlen. Jede Zahl ist daher der Inbegriff einer gewissen Menge solcher Einheiten.

2) Indem alle Zahlen durch das Zählen aus der Eins entstehen, erscheinen sie in einer bestimmten Reihenfolge, welche man die natürliche Zahlenreihe nennt, und welche von der Eins an ohne Ende fortgeht. In dieser Reihe heißt jede folgende die größere in Bezug auf jede vorhergehende, und jede vorhergehende die kleinere in Bezug auf jede folgende Zahl.

3) Denkt man sich durch zwei oder mehrere Zahlen eine neue Zahl bestimmt, so sagt man, jene Zahlen seien zu einer neuen Zahl verbunden. Die Thätigkeit des Verstandes dabei heißt das Operiren, die Darstellung desselben durch Zeichen eine Zahlenverbindung.

4) Zwei Zahlen können aber zunächst auf folgende Arten mit einander verbunden werden:

a. Man kann die Einheiten der einen Zahl zu denen der andern hinzuzählen; man sagt dann, die eine Zahl sei zu der andern addirt und nennt diese Operation die Addition.

b. Man kann die eine Zahl so oft nehmen, wie die andere Einheiten hat, und alle genommenen Zahlen addiren, man

sagt dann, die erste Zahl sei mit der zweiten **multiplicirt** und nennt diese Operation die **Multiplikation**.

c. Man kann die eine Zahl so oft nehmen wie die andere Einheiten hat und dann alle genommenen Zahlen multipliciren, man sagt dann, die erste Zahl sei mit der zweiten **potenzirt** und nennt diese Operation die **Potenzirung**.

5) Diese drei Arten, zwei Zahlen zu einer neuen Zahl zu verbinden, heißen **direkte Operationen**. Jede von ihnen bedingt zwei **indirekte Operationen**, welche jedoch bei der Addition und Multiplikation in eine einzige zusammenfallen. Man kann nämlich:

a. in **Bezug auf die Addition**, zu zwei Zahlen entweder eine dritte Zahl denken, **welche** zu der einen addirt, die andere giebt, oder **zu welcher** die eine addirt werden muß, um die andere hervorzubringen. Da diese beiden Operationen stets eine und dieselbe dritte Zahl bestimmen und sich also ihrem Wesen nach nicht von einander unterscheiden, so fallen sie in **eine** Operation zusammen, welche die **Subtraktion** heißt.

b. **In Bezug auf die Multiplikation** kann man zu zwei Zahlen entweder eine dritte Zahl denken, **welche mit** der einen multiplicirt die andere giebt, oder **mit welcher** die eine multiplicirt werden muß, um die andere hervorzubringen. Da auch diese beiden Operationen eine und dieselbe dritte Zahl bestimmen, so fallen sie ebenfalls in **eine** zusammen, welche die **Division** genannt wird.

c. **In Bezug auf die Potenzirung** kann man zu zwei Zahlen entweder eine dritte Zahl denken, **welche mit** der einen potenzirt die andere giebt, oder **mit welcher** die eine potenzirt werden muß, um die andere hervorzubringen. Diese beiden Operationen bestimmen im Allgemeinen zwei verschiedene Zahlen und sind daher ihrem Wesen nach von einander verschieden. Die erste dieser Operationen heißt die **Radicirung** oder **Wurzel-Ausziehung**, die zweite die **Logarithmirung***).

*) Da der Anfänger, dem die Zahlenlehre vorgetragen wird, gewöhnlich schon Unterricht im praktischen Rechnen erhalten hat, so wird es ihm leicht sein, sich die genannten 7 Operationen an Beispielen mit kleinen Zahlen deutlich zu machen.

6) Stellt man diese 7 Operationen, so wie sie jedesmal zusammengehören, nebeneinander, so hat man:

a. als Operationen der ersten Art:
die Addition und Subtraktion;

b. als Operationen der zweiten Art:
die Multiplikation und Division;

c. als Operationen der dritten Art:
die Potenzirung, Radizirung und Logarithmirung.

7) Die Bezeichnung der Zahlen geschieht entweder:

a. durch Buchstaben (unbestimmte Zahlzeichen), wenn beliebige Zahlen, ohne Rücksicht auf ihre Stelle in der Zahlenreihe dargestellt werden sollen. So kann man sich z. B. unter a jede beliebige Zahl vorstellen.

b. durch Ziffern (bestimmte Zahlzeichen), wenn man bestimmte Zahlen der Zahlenreihe bezeichnen will.

8) Jedes Zahlzeichen, so wie auch jede Verbindung von Zahlzeichen, heißt ein Zahlenausdruck, oder abgekürzt, ein Ausdruck.

9) Soll eine Zahlenverbindung mit einem andern Ausdruck auf's Neue verbunden werden, so muß sie, damit die Bedeutung des ganzen Ausdrucks nicht zweifelhaft wird, als solche noch erkennbar sein. Man schließt sie daher in solchem Falle in eine Klammer oder Parenthese (), [], ein. Diese Klammern können in der Folge nur dann weggelassen werden, wenn durch diese Weglassung die Bedeutung des ganzen Ausdrucks nicht geändert wird.

10) Zwei Ausdrücke heißen einander gleich, wenn sie dieselbe Zahl vorstellen. Um dies anzudeuten, verbindet man sie durch das Gleichheitszeichen (=) und nennt eine solche Verbindung z. B. $a = b$ eine Gleichung, die beiden Ausdrücke selbst aber die Seiten der Gleichung. Ist eine Gleichung richtig für jeden Werth der darin vorkommenden Ausdrücke, doch so, daß derselbe Ausdruck nur eine und dieselbe beliebige Zahl bedeutet, so nennt man dieselbe eine Formel. Eine Formel drückt daher immer ein allgemein gültiges Gesetz aus; z. B. $a = a$ sagt nichts anderes, als jede Zahl ist sich selbst gleich.

11) Stellt der Ausdruck a eine größere Zahl vor, als der Ausdruck b, so schreibt man $a > b$ (ausgesprochen: a größer als b), oder $b < a$ (ausgesprochen: b kleiner als a). Will man bloß

andeuten, daß zwei Ausdrücke a und b ungleich sind, so schreibt man $a >< b$ (ausgesprochen: a größer oder kleiner als b).

12) Da zwei gleiche Ausdrücke stets dieselbe Zahl vorstellen, so können sie auch jedesmal für einander gesetzt werden. Hieraus folgen sogleich nachstehende Sätze:

Ist $a = b$ und $b = c$, so ist auch $a = c$

d. h. Sind zwei Ausdrücke einem dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich.

Ist $a = b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$, und

Ist $a = b$ und $b < c$, so ist auch $a < c$

d. h. Ist von zwei gleichen Ausdrücken der eine größer oder kleiner als ein dritter, so ist es auch der andere.

Erster Abschnitt.

Die Zahlenverbindungen der ersten Art.

Erstes Kapitel.

Gesetze der Addition und Subtraktion im Allgemeinen.

§. 1.

Addiren heißt aus zwei oder mehreren gegebenen Zahlen eine neue Zahl finden, welche soviel Einheiten enthält, wie die gegebenen Zahlen zusammengenommen. Die gegebenen Zahlen werden Summanden (Posten, Addenden) genannt und durch das Zeichen +, welches plus ausgesprochen wird, mit einander verbunden; die durch diese Verbindung entstandene Zahl heißt die Summe. Z. B. $a + b$ ist eine Summe, deren Summanden a und b sind, und stellt diejenige Zahl vor, welche so viel Einheiten enthält, wie a und b zusammengenommen.

§. 2.

1) Ist $a = b$, so ist auch $a + c = b + c$

d. h. Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.

Beweis. Da $a = b$ ist, so kann man in dem Ausdruck $a + c$ die Zahl b statt a setzen und erhält sogleich $b + c$.

2) $a + b = b + a$

d. h. Man kann die Summanden in beliebiger Ordnung addiren.

Beweis. Beide Seiten der Gleichung stellen dieselbe Zahl vor, nämlich diejenige, welche so viel Einheiten enthält wie a und b zusammen haben.

3) $(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c)$

d. h. **Eine Zahl wird zu einer Summe addirt, wenn man sie zu irgend einem der Summanden addirt, oder: Eine Summe wird zu einer Zahl addirt, wenn man zuerst den einen und dann zu dieser Summe den andern Summanden in beliebiger Ordnung addirt.**

Beweis. Jede der drei Verbindungen stellt ein und dieselbe Zahl vor, nämlich diejenige, welche so viel Einheiten hat, wie a, b und c zusammengenommen.

§. 3.

Durch wiederholte Anwendung des vorigen Lehrsatzes ergiebt sich noch, daß, wenn beliebig viele Zahlen in eine Summe vereinigt werden sollen, die Ordnung, in welcher die einzelnen Additionen ausgeführt werden, dabei ganz beliebig ist. So ist z. B.

$[(a + b) + c] + d = [(a + c) + b] + d =$

$[(a + b) + d] + c = (b + a) + (c + d)$ u. s. w.

In einem solchen durch bloße Addition entstandenen Ausdruck können daher die Klammern ohne Weiteres weggelassen werden, da die Bedeutung des Ausdrucks immer dieselbe bleibt, in welcher Ordnung man auch die einzelnen Zahlen nach und nach verbunden denkt. Obiges Beispiel kann daher auch so geschrieben werden:

$a + b + c + d = a + c + b + d = a + b + d + c =$
$b + a + c + d$ u. s. w.

§. 4.

Eine Zahl b von einer anderen Zahl a **subtrahiren**, heißt eine dritte Zahl finden, welche zu b addirt, a giebt. Diese dritte Zahl wird durch die Verbindung $a - b$, welche eine **Differenz** (Rest) heißt und a **minus** b ausgesprochen wird, dargestellt. Dabei wird a der **Minuendus** und b der **Subtrahendus** genannt.

Anmerkung. 1) Daß der Begriff der Subtraktion sogleich aus dem der Addition folgt, ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung: Es ist $3 + 2 = 5$; wäre nun aus irgend einem Grunde der zweite Summand 2 nicht genau zu erkennen, so entstände die Aufgabe, eine Zahl zu finden, welche zu 3 addirt, 5 giebt. Da nun diese Zahl nicht immer sogleich bekannt sein wird, so muß sie durch die beiden gegebenen Zahlen 3 und 5 dargestellt werden können, und dies geschieht durch das Zeichen $5 - 3$.

2) Der Satz Nr. 2. des §. 2. ist die Ursache, warum die beiden der Addition entgegenstehenden indirekten Operationen in eine einzige, die **Subtraktion**, zusammenfallen.

3) Bezeichnet man den Minuendus mit M, den Subtrahendus mit S und die Differenz (den Rest) mit R, so folgt, daß jede Subtraktion richtig ist, wenn $R + S = M$ ist.

4) Die Differenz $a - b$ hat vorläufig nur dann eine Bedeutung, wenn der Minuendus a größer als der Subtrahendus b ist, denn nur in diesem Falle läßt sich eine Zahl denken, welche zum Subtrahendus addirt, den Minuendus giebt.

§. 5.

1) $(a - b) + b = a$

d. h. **Wird zu einer Differenz der Subtrahendus (oder die Differenz zum Subtrahendus) addirt, so erhält man den Minuendus.**

Beweis. $a - b$ ist eine Differenz, also nach §. 4. diejenige Zahl, welche zu b addirt, a giebt, folglich muß $(a - b) + b = a$ sein.

2) $(a + b) - b = a$

d. h. **Wird von einer Summe der eine Summand subtrahirt, so erhält man den andern Summanden.**

Beweis. $a + b = M$, $b = S$ und a soll $= R$ sein. Diese Subtraktion ist richtig, wenn $R + S = M$, also wenn

$$a + b = a + b \text{ ist;}$$

dies ist aber der Fall, weil jeder Ausdruck sich selbst gleich ist, mithin der Satz richtig.

§. 6.

Da gleiche Ausdrücke für einander gesetzt werden können, so muß, wenn $a = b$ ist, auch $a - c = b - c$ sein;

d. h. **Gleiches von Gleichem subtrahirt, läßt Gleiches.**

§. 7.

Die Gesetze, nach welchen Summen und Differenzen durch Addition und Subtraktion mit einer Zahl verbunden werden, sind folgende:

1) $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$

d. h. **Eine Zahl wird von einer Summe subtrahirt, wenn man sie von irgend einem der beiden Summanden subtrahirt und zu der erhaltenen Differenz den andern Summanden addirt.**

Beweis des ersten Theils: $(a + b) - c = (a - c) + b$. Hier ist $a + b = M$, $c = S$ und $(a - c) + b$ soll $= R$ sein. Ist dies richtig,

so muß $R + S = M$ oder

$$[(a - c) + b] + c = a + b \text{ sein.}$$

In der großen Klammer steht eine Summe, zu welcher eine Zahl addirt werden soll, dies geschieht nach §. 2. Nr. 3., indem man sie zu irgend einem der beiden Summanden addirt, den anderen Summanden aber als solchen beibehält. Der Satz ist daher auch noch richtig, wenn $[(a - c) + c] + b = a + b$ ist. $(a - c) + c$ ist aber nach §. 5. Nr. 1. $= a$, man erhält daher

$$a + b = a + b$$

und da dies richtig ist, so ergiebt sich hieraus auch die Richtigkeit des obigen Gesetzes.

Die Richtigkeit des zweiten Theils, nämlich:

$$(a + b) - c = a + (b - c),$$

ergiebt sich daraus, daß man die Summanden a und b vertauschen kann.

$$2) \; (a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c)$$

d. h. **Eine Zahl wird zu einer Differenz addirt, wenn man sie entweder zum Minuendus addirt und von der erhaltenen Summe den Subtrahendus subtrahirt, oder wenn man sie vom Subtrahendus subtrahirt und die erhaltene Differenz vom Minuendus subtrahirt.**

Beweis des ersten Theils: $(a - b) + c = (a + c) - b$. Vertauscht man beide Seiten der Gleichung, so erkennt man sogleich, daß daraus das Gesetz Nr. 1. dieses Paragraphen entsteht, welches so eben bewiesen worden ist.

Beweis des zweiten Theils: $(a - b) + c = a - (b - c)$. Hier findet man die Subtraktion auf der rechten Seite der Gleichung und zwar ist $a = M$, $b - c = S$ und $(a - b) + c$ soll $= R$ sein. Dies ist der Fall, wenn

$$R + S = M, \text{ also wenn}$$
$$[(a - b) + c] + (b - c) = a \text{ ist.}$$

In der großen Klammer steht eine Summe, zu welcher der Ausdruck $b - c$ addirt werden soll; führt man dies nach §. 2. Nr. 3. aus, so erhält man $(a - b) + [c + (b - c)] = a$.

Für $c + (b - c)$ kann man $(b - c) + c$ und nach §. 5. Nr. 1. b setzen, dann muß $(a - b) + b = a$ sein, und da dies nach §. 5. Nr. 1. der Fall ist, so ist die Richtigkeit des Satzes erwiesen.

$$3) \; (a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$$

d. h. **Eine Zahl wird von einer Differenz subtrahirt, wenn man sie entweder vom Minuend und von der erhaltenen Differenz den Subtrahend subtrahirt, oder wenn man sie zum Subtrahend addirt und die erhaltene Summe vom Minuend subtrahirt.**

Beweis des ersten Theils: $(a-b)-c=(a-c)-b$. Hier ist $a-b=M$, $c=S$ und $(a-c)-b=R$. Dieser ist richtig, wenn $R+S=M$, also wenn

$$[(a-c)-b]+c=a-b \text{ ist.}$$

In der großen Klammer steht eine Differenz, zu welcher eine Zahl addirt werden soll, dies geschieht nach Satz Nr. 2. dieses Paragraphen, indem man die Zahl zum Minuendus addirt, den Subtrahendus aber als solchen beibehält. Der Satz ist also auch dann richtig, wenn

$$[(a-c)+c]-b=a-b \text{ ist.}$$

Setzt man aber statt $(a-c)+c$ nach §. 5. Nr. 1. a, so ergiebt sich die Richtigkeit sogleich.

Beweis des zweiten Theils: $(a-b)-c=a-(b+c)$.

Hier ist $a-b=M$, $c=S$ und $a-(b+c)=R$. Dieser ist richtig, wenn $R+S=M$, also wenn

$$[a-(b+c)]+c=a-b \text{ ist.}$$

In der großen Klammer steht eine Differenz, zu welcher eine Zahl addirt werden soll, dies geschieht nach Nr. 2. dieses Paragraphen, indem man sie vom Subtrahendus subtrahirt, den Minuendus aber als solchen beibehält. Der Satz ist also auch dann richtig, wenn

$$a-[(b+c)-c]=a-b \text{ ist.}$$

Setzt man aber statt $(b+c)-c$ nach §. 5. Nr. 2. b, so ergiebt sich die Richtigkeit sogleich.

$$4)\ a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$$

d. h. **Eine Summe wird von einer Zahl subtrahirt, wenn man jeden Summanden einzeln und zwar in beliebiger Ordnung subtrahirt.**

Beweis. Liest man die Formel von der Rechten zur Linken, d. h. so:

$$(a-c)-b=(a-b)-c=a-(b+c),$$

so erhält man das Gesetz des Satzes Nr. 3., welches so eben bewiesen worden ist.

$$5)\ a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b$$

d. h. **Eine Differenz wird zu einer Zahl addirt, wenn man entweder den Minuendus zu der Zahl addirt und von der erhaltenen Summe den Subtrahendus subtrahirt, oder wenn man den Subtrahendus von der Zahl subtrahirt und zu der erhaltenen Differenz den Minuendus addirt*).**

Beweis. Daß $(a+b)-c=a+(b-c)$ und auch $(a+b)-c=(a-c)+b$ ist, ergiebt sich sofort aus dem Satz Nr. 1. dieses Paragraphen.

---

*) In beiden Fällen wird der Minuendus addirt und der Subtrahendus subtrahirt.

6) $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b$

d. h. Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahirt, wenn man entweder den Minuendus von der Zahl subtrahirt und zu der erhaltenen Summe den Subtrahendus addirt, oder wenn man den Subtrahendus zu der Zahl addirt und von der erhaltenen Summe den Minuendus subtrahirt*).

Beweis. Daß $(a - b) + c = a - (b - c)$ und auch $(a - b) + c = (a + c) - b$ ist, ergiebt sich sogleich aus dem Satze Nr. 2. dieses Paragraphen.

§. 8.

Die Gesetze, nach welchen Summen und Differenzen untereinander durch Addition und Subtraktion verbunden werden, sind folgende:

1) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$

d. h. Zwei Differenzen werden addirt, wenn man die Summe der Subtrahenden von der Summe der Minuenden subtrahirt.

Beweis. Hier liegt die Subtraktion auf der rechten Seite der Gleichung, und zwar ist $a + c = M$, $b + d = S$ und $(a - b) + (c - d) = R$. Dieser ist richtig, wenn $R + S = M$, also wenn
$$[(a - b) + (c - d)] + (b + d) = a + c \text{ ist.}$$
Hier sollen zwei Summen addirt werden, dabei ist aber nach §. 3. die Ordnung, in welcher die einzelnen Summanden addirt werden, ganz beliebig. Der Satz ist also auch richtig, wenn
$$[(a - b) + b] + [(c - d) + d] = a + c \text{ ist.}$$
Nach §. 5. Nr. 1. ist $(a - b) + b = a$ und
$(c - d) + d = c$, woraus die Richtigkeit folgt.

Anmerkung. Vertauscht man beide Seiten der obigen Gleichung, so erhält man:

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$$

d. h. Zwei Summen werden von einander subtrahirt, wenn man die Summanden der einen Summe einzeln von denen der anderen Summe subtrahirt, und dann die erhaltenen Differenzen addirt.

2) $(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$

d. h. Zwei Differenzen werden von einander subtrahirt,

*) In beiden Fällen wird der Minuendus subtrahirt und der Subtrahendus addirt.

wenn man die Differenz der Subtrahenden von der Differenz der Minuenden subtrahirt.

Beweis. Hier ist $a - b = M$, $c - d = S$ und $(a - c) - (b - d) = R$. Dieser ist richtig, wenn $R + S = M$, also wenn

$$[(a - c) - (b - d)] + (c - d) = a - b \text{ ist.}$$

Hier sollen zwei Differenzen addirt werden, und wenn man darauf den Satz Nr. 1. dieses Paragraphen anwendet, so erhält man:

$$[(a - c) + c] - [(b - d) + d] = a - b.$$

Nach §. 5. Nr. 1. ist aber $(a - c) + c = a$ und $(b - d) + d = b$, woraus die Richtigkeit hervorgeht.

§. 9.

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

d. h. Eine Differenz (d. h. ihr Werth) bleibt unverändert, wenn man sowohl zum Minuendus, als auch zum Subtrahendus, ein und dieselbe Zahl addirt.

Beweis. Es ist $a = M$, $b = S$ und $(a + c) - (b + c)$ soll $= R$ sein. Dieser ist richtig, wenn $R + S = M$, also wenn

$$[(a + c) - (b + c)] + b = a \text{ ist.}$$

In der großen Klammer steht eine Differenz, zu welcher eine Zahl addirt werden soll, dies geschieht nach Nr. 2. des §. 7., wenn man die Zahl vom Subtrahendus subtrahirt und den Minuendus als solchen beibehält. Der Satz ist also noch richtig, wenn:

$$(a + c) - [(b + c) - b] = a \text{ ist.}$$

Es ist aber nach Nr. 2. des §. 5. $(b + c) - b = c$ und $(a + c) - c = a$, woraus die Richtigkeit hervorgeht.

Anmerkung. Vertauscht man beide Seiten der Gleichung, so heißt sie $(a + c) - (b + c) = a - b$

d. h. Eine Differenz (d. h. ihr Werth) bleibt unverändert, wenn man sowohl vom Minuendus, als auch vom Subtrahendus ein und dieselbe Zahl subtrahirt*).

Zweites Kapitel.

Erweiterte Auffassung der Gesetze der Addition und Subtraktion. Specielle Zahlenformen, welche sich daraus ergeben.

§. 10.

Obgleich die Gesetze des vorigen Kapitels ursprünglich unter der Voraussetzung aufgestellt und bewiesen worden sind, daß man

*) Anfänger müssen sich mit dem Inhalt der wenigen Sätze der §§. 7., 8. und 9. recht vertraut machen, weil dieselben in dem folgenden Kapitel eine häufige Anwendung finden.

es überall mit wirklichen Zahlen zu thun habe, daß also auch in jeder Differenz der Minuendus größer als der Subtrahendus sei, so zeigt doch eine nähere Betrachtung, daß jene Gesetze in einem viel allgemeineren Sinne gelten, indem sie nicht nur Eigenschaften der Zahlen an sich, sondern auch die Beziehungen der Operationen des Addirens und Subtrahirens zu einander aussprechen.

Hierdurch gewinnen aber auch die Zahlenverbindungen eine allgemeinere Bedeutung und erscheinen als bloße Operations-formen (nämlich die Summe als eine durch das + Zeichen angezeigte Addition von der Eigenschaft, daß die Summanden in beliebiger Ordnung geschrieben werden können; die Differenz als eine durch das — Zeichen angezeigte Subtraktion von der Eigenschaft, daß der Subtrahendus zu ihr addirt, den Minuendus giebt), auf welche Operationsformen nun die Gesetze des vorigen Kapitels angewendet werden können, unbekümmert, ob man es mit wirklichen Zahlen zu thun habe, oder nicht.

Ebenso gewinnt dann auch die Gleichung eine allgemeinere Bedeutung. Zwei Ausdrücke sind nämlich nicht nur dann einander gleich, wenn sie ein und dieselbe Zahl vorstellen, sondern vielmehr, wenn sie, den Operations-Gesetzen gemäß, für einander gesetzt werden können.

Hat man aber die Begriffe der Summe, Differenz und Gleichung in diesem abstrakteren Sinne aufgefaßt, so kommt es nun darauf an, die speciellen Fälle, mit denen man es nun zu thun hat, näher zu untersuchen, und ihre Behandlung den allgemeinen Operations-Gesetzen gemäß, festzustellen.

§. 11.

$$a - a = b - b$$

d. h. **Alle Differenzen, deren Minuendus gleich dem Subtrahendus ist, sind einander gleich.**

Beweis. Hier ist $a = M$, $a = S$ und $b - b$ soll $= R$ sein, dieser ist richtig, wenn $R + S = M$, also wenn

$$(b - b) + a = a \text{ ist.}$$

Zu einer Differenz wird aber eine Zahl addirt, wenn man nach Nr. 2. des §. 7. die Zahl zum Minuendus addirt und den Subtrahendus als solchen beibehält. Der Satz ist also auch dann noch richtig, wenn

$$(b + a) - b = a$$

ist, was aber aus Nr. 2. des §. 5. folgt.

§. 12.

Da alle Differenzen, deren Minuendus gleich dem Subtrahendus ist, unter sich gleich sind, so bezeichnet man sie der Kürze wegen durch ein und dasselbe Zeichen, nämlich durch 0, und spricht es aus: Null. Es ist daher $0 = a - a$ oder $= b - b$ u. s. w.

§. 13.

1) $a + 0 = a$

d. h. Wenn man Null zu einem Ausdruck addirt, so bleibt dersebe unverändert.

Beweis. Nach der Erklärung des §. 12. ist $0 = b - b$, mithin ist auch
$$a + 0 = a + (b - b).$$
Eine Differenz wird aber nach Nr. 5. des §. 7. zu einem Ausdruck addirt, wenn man den Minuendus zu dem Ausdruck addirt und von der erhaltenen Summe den Subtrahendus subtrahirt; es ist daher auch
$$a + 0 = (a + b) - b$$
wofür man nach Nr. 2. des §. 5. auch bloß a setzen kann.

2) $a - 0 = a$

d. h. Wenn man Null von einem Ausdruck subtrahirt, so bleibt derselbe unverändert.

Beweis. Nach der Erklärung des §. 12. ist $0 = b - b$, mithin ist auch
$$a - 0 = a - (b - b).$$
Nach Nr. 6. des §. 7. wird aber eine Differenz von einem Ausdruck subtrahirt, wenn man den Minuendus von dem Ausdruck subtrahirt und zu der erhaltenen Differenz den Subtrahendus addirt; es ist daher auch
$$a - 0 = (a - b) + b$$
wofür man nach Nr. 1. des §. 5. auch bloß a setzen kann.

Anmerkung. Aus Nr. 1. dieses Paragraphen folgt auch, daß $0 + 0 = 0$ ist, während schon aus der Erklärung des §. 12. hervorgeht, daß $0 - 0 = 0$ sein muß, was sich aber auch aus Nr. 2. dieses Paragraphen ergiebt.

§. 14.

Eine Summe, deren erster Summand Null ist, z. B. $0 + a$ heißt eine positive Zahl. Dabei soll der Einfachheit wegen der erste Summand 0 weggelassen werden, so daß man statt $0 + a$ kürzer $+ a$ schreibt.

Eine Differenz, deren Minuend Null ist, z. B. $0 - a$, heißt eine negative Zahl, wobei ebenfalls die Null weggelassen, also statt $0 - a$ nur $- a$ geschrieben werden soll.

In beiden Fällen nennt man den Ausdruck a das Glied und die Zeichen + und — die Vorzeichen.

Eine Zahl, vor welcher kein Vorzeichen steht, z. B. a, nennt man wohl auch eine **absolute Zahl**.

§. 15.

Da man die Summanden einer Summe vertauschen kann, so ist $0 + a = a + 0$, mithin auch nach §. 13. Nr. 1. $= a$. **Hieraus folgt, daß jede positive Zahl gleich ihrem absoluten Gliede ist, und daß man vor jede absolute Zahl auch das Vorzeichen + setzen kann.**

§. 16.

Die Gesetze, nach welchen positive und negative Zahlen addirt werden, ergeben sich aus folgenden Formeln:

1) $(+ a) + (+ b) = + (a + b)$.
2) $(- a) + (- b) = - (a + b)$.
3) $(+ a) + (- b) = + (a - b) = - (b - a)$.
4) $(- a) + (+ b) = - (a - b) = + (b - a)$.

Diese Formeln lassen sich in folgende Regel zusammenfassen: **Haben die zu addirenden Ausdrücke gleiche Vorzeichen, so addire man ihre absoluten Glieder und gebe der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen; haben sie aber verschiedene (entgegengesetzte) Vorzeichen, so subtrahire man ihre absoluten Glieder und gebe der Differenz das Vorzeichen, welches der Minuendus hatte.**

Beweis 1. Nach §. 15. ist:

$$(+ a) + (+ b) = a + b = + (a + b).$$

Beweis 2. Nach §. 14. ist:

$$(- a) + (- b) = (0 - a) + (0 - b).$$

Addirt man diese Differenzen nach der Regel des §. 8. Nr. 1., so ist auch $(- a) + (- b) = (0 + 0) - (a + b)$, wofür man nach der Anmerkung im §. 13. auch $0 - (a + b)$ und nach §. 14. auch bloß $- (a + b)$ setzen kann.

Beweis 3. Nach §. 14. in Verbindung mit §. 15., ist:

$$(+ a) + (- b) = a + (0 - b).$$

Eine Zahl kann aber nach Nr. 2. des §. 7. auf zwei verschiedene Arten zu einer Differenz addirt werden, entweder man addirt sie zum Minuendus und behält den Subtrahendus als solchen bei, dann erhält man $(0 + a) - b = a - b = + (a - b)$; oder man subtrahirt sie vom Subtrahendus und behält den Minuendus als solchen bei, wodurch man $0 - (b - a)$ oder $- (b - a)$ erhält.

Beweis 4. Da man die Summanden einer Summe vertauschen kann, so ist $(-a) + (+b) = (+b) + (-a)$ und wenn man hierauf die Formel Nr. 3. anwendet, so ergiebt sich sogleich die Richtigkeit, nämlich $(+b) + (-a) = +(b-a) = -(a-b)$.

§. 17.

1) Aus §. 16. ergiebt sich sogleich folgendes Gesetz:

Man kann in jeder Differenz Minuend und Subtrahend mit einander vertauschen, wenn man nur das vor der Differenz stehende Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandelt; denn es ist $+(a-b) = -(b-a)$. Hierdurch ist zugleich die Möglichkeit gegeben, eine größere Zahl von einer kleineren zu subtrahiren, z. B. $5-7 = +(5-7) = -(7-5) = -2$.

Es ist mithin jede Differenz, deren Minuendus kleiner als der Subtrahendus ist, gleich einer negativen Zahl.

2) Hat man eine positive und eine negative Zahl, deren Glieder nicht allgemeine, in Buchstaben ausgedrückte, sondern bestimmte, in Ziffern geschriebene Zahlen sind, zu addiren, und will man dabei sogleich zu einem einfachen Resultate gelangen, so muß man das kleinere Glied vom größeren subtrahiren und der Differenz das Vorzeichen des größeren Gliedes geben, z. B.

$$(+7) + (-5) = +(7-5) = +2 = 2.$$
$$(-8) + (+3) = -(8-3) = -5.$$
$$(+2) + (-9) = -(9-2) = -7.$$

3) Die Summe zweier Ausdrücke mit gleichen Gliedern aber entgegengesetzten Vorzeichen ist gleich Null, denn es ist

$$(+a) + (-a) = +(a-a) = a - a = 0.$$

§. 18.

Die Gesetze, nach welchen positive und negative Zahlen von einander subtrahirt werden, ergeben sich aus folgenden Formeln:

1) $(+a) - (+b) = +(a-b) = -(b-a)$.
2) $(-a) - (-b) = -(a-b) = +(b-a)$.
3) $(+a) - (-b) = +(a+b)$.
4) $(-a) - (+b) = -(a+b)$.

Diese Formeln lassen sich in folgende Regel zusammenfassen: Sollen positive und negative Zahlen von einander subtrahirt werden, so verwandle man allemal das Vorzeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte und addire beide Ausdrücke dann nach der Regel des §. 16.

Beweis 1. Nach §. 15. ist:
$(+a)-(+b)=a-b=+(a-b)$, wofür man sogleich nach Nr. 1. des §. 17. auch $-(b-a)$ setzen kann.

Beweis 2. Es ist $(-a)-(-b)=(0-a)-(0-b)$.
Subtrahirt man beide Differenzen nach Nr. 2. des §. 8., so erhält man $(0-0)-(a-b)=0-(a-b)=-(a-b)$, wofür man auch nach Nr. 1. des §. 17. $+(b-a)$ setzen kann.

Beweis 3. Es ist $(+a)-(-b)=a-(0-b)$.
Eine Differenz kann man nach Nr. 6. des §. 7. von einer Zahl subtrahiren, indem man den Subtrahendus zu der Zahl addirt und von der erhaltenen Summe den Minuendus subtrahirt; es ist also auch:

$$(+a)-(-b)=(a+b)-0=+(a+b).$$

Beweis 4. $(-a)-(+b)=(0-a)-b$.
Eine Zahl wird nach Nr. 3. des §. 7. von einer Differenz subtrahirt, wenn man sie zum Subtrahendus addirt und den Minuendus als solchen beibehält; es ist also auch:

$$(-a)-(+b)=0-(a+b)=-(a+b).$$

§. 19.

In dem allgemeinen Begriff der Differenz zweier wirklichen Zahlen z. B. $a-b$ sind daher als specielle Fälle enthalten:

1) die positive Zahl, wenn $a > b$,

2) die Null, wenn $a = b$ und

3) die negative Zahl, wenn $a < b$ ist.

Diese drei speciellen Zahlenformen sind aber die einzigen, zu denen man durch bloße Anwendung der Addition und Subtraktion auf wirkliche Zahlen kommen kann.

Drittes Kapitel.

Die algebraischen Summen, das Einschließen in Klammern und das Auflösen derselben.

§. 20.

Eine Summe, deren Summanden positive und negative Zahlen sind, z. B. $(+a)+(-b)+(-c)+(+d)$, nennt man eine algebraische Summe.

§. 21.

Addirt man in der obigen algebraischen Summe nach der Regel des §. 16. die beiden ersten Summanden, so erhält man:

$$(a-b)+(-c)+(+d).$$

Addirt man hier wieder die beiden ersten Summanden, so verwandelt sie sich in:

$$[(a - b) - c] + (+ d).$$

Jetzt hat man nur noch 2 Summanden, und vereinigt man nach derselben Regel auch diese, so erhält man:

$$[(a - b) - c] + d.$$

Dieser Ausdruck zeigt vermöge seiner Klammern nichts anderes an, als daß man von der Linken zur Rechten rechnen soll, d. h. man soll von a zuerst b subtrahiren, von der erhaltenen Differenz c subtrahiren und zu der dann entstandenen Differenz d addiren.

Zur Vereinfachung sollen aber von jetzt an alle diejenigen Klammern fortgelassen werden, welche nichts anderes anzeigen, als daß von der Linken zur Rechten gerechnet werden soll, dann kann man aber obige algebraische Summe kürzer so schreiben:

$$a - b - c + d.$$

§. 22.

1) Da man in jeder Summe die Summanden vertauschen darf, so kann dies auch in jeder algebraischen Summe geschehen, z. B. $a - b + c + d - e = a + c - b - e + d$
$= - b + a - e + c + d.$

2) Eine algebraische Summe wird zu einem beliebigen Ausdruck A addirt, wenn man ihre Summanden in beliebiger Ordnung neben den Ausdruck A hinschreibt, z. B.

$$A + (a - b - c) = A + a - b - c = A - b + a - c.$$

3) Da eine Summe von einer Zahl subtrahirt wird, indem man jeden Summanden nach und nach subtrahirt, die Subtraktion positiver und negativer Zahlen aber darin besteht, daß man die Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt, und dann die Zahlen addirt, so folgt, daß eine algebraische Summe von einem beliebigen Ausdruck A subtrahirt wird, indem man alle Summanden mit entgegengesetzten Vorzeichen neben den Ausdruck A hinschreibt, z. B.

$$A - (a - b + c) = A - a + b - c.$$

§. 23.

Das Verfahren, wonach die angezeigte Addition oder Subtraktion einer (dann jedesmal in Klammern eingeschlossenen) algebraischen Summe ausgeführt wird, nennt man das **Auflösen der Klammern**.

§. 24.

1) Aus §. 22. ergiebt sich für das Auflösen der Klammern folgende allgemeine Regel:

Steht vor einer Klammer das Vorzeichen +, so kann man die Klammer und das vorstehende Vorzeichen ohne Weiteres fortlassen, steht dagegen vor einer solchen das Vorzeichen —, so kann man zwar auch die Klammer mit dem davor stehenden Vorzeichen fortlassen, muß aber alle in derselben stehenden Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandeln, z. B.

$$(a - b + c) + (e - f) - (g - h) - (-i + k) =$$
$$a - b + c + e - f - g + h + i - k.$$

2) Stehen in einer Klammer neue Klammern, so überzeuge man sich, bis wohin eine jede Klammer reicht, und löse erst die größeren und dann die kleineren Klammern auf, z. B.

$$[a - (b - c) + d] + [(e - f) - (g + h)] =$$
$$a - (b - c) + d + (e - f) - (g + h) =$$
$$a - b + c + d + e - f - g - h.$$

Auch kann man zunächst die inneren und dann die äußeren Klammern auflösen, z. B.

$$[a - (b - c) + d] + [(e - f) - (g + h)] =$$
$$(a - b + c + d) + (e - f - g - h) =$$
$$a - b + c + d + e - f - g - h.$$

3) Umgekehrt kann man auch in einer algebraischen Summe jede beliebige Menge von Summanden in Klammern einschließen und dann entweder das + Zeichen oder das — Zeichen davorsetzen. Im ersteren Falle behalten die eingeschlossenen Summanden ihre Vorzeichen bei, im letzteren Falle erhalten sie entgegengesetzte Vorzeichen, z. B.

$$a - b - c + d - e + f + g$$
$$= a - b + (-c + d - e + f + g) \text{ oder}$$
$$a - b - c + d - e + f + g$$
$$= a - b - (c - d + e - f - g).$$

4) Kommen in einer algebraischen Summe zwei Summanden vor, deren Glieder gleich, aber deren Vorzeichen entgegengesetzt sind, so kann man sie ohne Weiteres fortlassen. Man sagt dann, diese Summanden haben sich weggehoben, z. B.

$$a - b + c + b - d = a + c - d.$$

5) Sind die einzelnen Glieder einer algebraischen Summe bestimmte in Ziffern geschriebene Zahlen, so findet man den Werth dieser Summe am kürzesten dadurch, daß man alle positiven Summanden und ebenso alle negativen Summanden für sich addirt und die Summe der letzteren von der Summe der ersteren subtrahirt, z. B.

$$3 - 7 + 6 - 5 - 4 + 9 - 3 + 2 =$$
$$(3 + 6 + 9 + 2) - (7 + 5 + 4 + 3) =$$
$$20 - 19 = 1.$$

Uebungen zum ersten Abschnitt.

I. Addition und Subtraktion positiver und negativer Zahlen.

Zu §. 16. und 18.

1. $(+4) + (+5) = +9.$
2. $(-3) + (-1) = -4.$
3. $(+6) + (-8) = -2.$
4. $(-7) + (+9) = +2.$
5. $(-5) + (+5) = 0.$
6. $(+4) - (+5) = -1.$
7. $(-3) - (-1) = -2.$
8. $(+6) - (-8) = +14.$
9. $(-7) - (+9) = -16.$
10. $(-5) - (+5) = -10.$

II. Substitution von Zahlenwerthen.

Welchen Zahlenwerth haben die folgenden Ausdrücke, wenn:
1. $a = 8$, $b = 5$, $c = 3$; 2. $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$; 3. $a = 0$, $b = 3$, $c = 4$; 4. $a = 0$, $b = -3$, $c = 5$; 5. $a = 0$, $b = -3$, $c = -4$; 6. $a = -3$, $b = 5$, $c = -4$; 7. $a = -3$, $b = -5$, $c = -4$ ist?

$a + b + c$. 1. 16; 2. 12; 3. 7; 4. 2; 5. −7; 6. −2; 7. −12;
$(a + b) - c$. 1. 10; 2. 2; 3. −1; 4. −8; 5. 1; 6. 6; 7. −4.
$(a - b) + c$. 1. 6; 2. 4; 3. 1; 4. 8; 5. −1; 6. −12; 7. −2.
$(a - b) - c$. 1. 0; 2. −6; 3. −7; 4. −2; 5. 7; 6. −4; 7. 6.
$a + (b - c)$. 1. 10; 2. 2; 3. −1; 4. −8; 5. 1; 6. 6; 7. −4.
$a - (b + c)$. 1. 0; 2. −6; 3. −7; 4. −2; 5. 7; 6. −4; 7. 6.
$a - (b - c)$. 1. 6; 2. 4; 3. 1; 4. 8; 5. −1; 6. −12; 7. −2.

III. Auflösen von Klammern.

1. $5 + (2 - 6) = 1.$
2. $(3 + 2 - 1) - (3 - 5) = 6.$
3. $(2 - 3) - (3 - 4) - (-5 + 6 - 4) = 3.$
4. $a - (a - b + c) - (b - a) = a - c.$
5. $(d - a) - (-a + d - b) + (d - a + e) + a = b + d + e.$
6. $(b - a + c) + (a - d - c) - (b - d) = 0.$
7. $[6 - (4 + 3)] - [2 - (5 - 7) - 4] = -1.$
8. $\{6 - [-4 - (2 - 7) + 3] + 2\} - 8 = -4.$

9. $a - [(b - c) + d] - (a - b - d) = c.$
10. $- \{5 - [3 - (6 - 2)]\} = - 6.$
11. $40 - \{8 + 2 - [5 - 4 + 2 - (3 + 4) - 10] + 4 - 5\} = 17.$
12. $- 9 + \{4 - [-(8 - 2) - (3 - 7)] - (8 + 2)\} = - 13.$
13. $-(8 + 2 - 4) - [6 - (2 - 3 + 1) - 4] + 8 = 0.$
14. $\{a - b - [a - b + (b - a)] + b - a\} = 0.$

Zweiter Abschnitt.

Von den Zahlenverbindungen der zweiten Art.

Erstes Kapitel.

Gesetze der Multiplikation und Division im Allgemeinen.

§. 25.

Eine Zahl a mit einer anderen b multipliciren heißt die Zahl a so oft als Summand setzen, wie die Zahl b Einheiten enthält. Die durch diese Operation bestimmte dritte Zahl wird durch die Verbindung $a \,.\, b$ oder $a \times b$, auch bloß ab, welche ein Produkt heißt, und a mal b ausgesprochen wird, bezeichnet. Dabei heißt a der Multiplikandus, b der Multiplikator, beide zusammen auch die Faktoren des Produkts*)

§. 26.

1) Das Produkt $a \,.\, b$ zweier wirklichen Zahlen ist jedesmal wieder eine wirkliche Zahl, denn $a \,.\, b$ bedeutet die Summe

$$a + a + a + a + \ldots \text{(b mal)},$$

in welcher a so oft als Summand vorkommt, wie b Einheiten hat. So ist z. B.

$$2 \,.\, 3 = 2 + 2 + 2, \text{ also } = 6.$$

2) Da $1 \,.\, a = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \text{(a mal)}$, also ein Inbegriff von a Einheiten ist, so muß $1 \,.\, a = a$ sein. (Vergleiche Einleitung Nr. 1.)

---

*) Die Multiplikation behandelt daher nur einen speciellen Fall der Addition, nämlich den, wo die Summanden einer Summe einander gleich sind. Bei zwei in Ziffern geschriebenen Zahlen darf man die Faktoren nicht ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen neben einander schreiben, weil dies eine andere Bedeutung hat, wie solches später gezeigt werden soll.

Wird daher Eins mit einer beliebigen Zahl multiplicirt, so bleibt diese Zahl unverändert, und umgekehrt kann jede Zahl als ein Produkt betrachtet werden, dessen Multiplikandus Eins und dessen Multiplikator die Zahl selbst ist.

3) Ist $a = b$, so ist auch $a \, . \, c = b \, . \, c$;
d. h. Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches.

§. 27.

Die Gesetze, welche die Beziehungen der Multiplikation zur Addition und Subtraktion aussprechen, sind folgende:

1) $(a + b) \, . \, c = a \, . \, c + b \, . \, c$
d. h. Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Summanden mit der Zahl multiplicirt und die erhaltenen Produkte addirt.

Beweis. Nach der Erklärung der Multiplikation ist

$$(a + b) \, . \, c = (a + b) + (a + b) + \ldots\ldots (c \text{ mal})$$

Summen werden aber addirt, indem man die Summanden in beliebiger Ordnung addirt, es ist also auch:

$(a + b) \, . \, c = [a + a + a \ldots (c \text{ mal})] + [b + b + b + \ldots (c \text{ mal})]$,
d. h. $(a + b) \, . \, c = a \, . \, c + b \, . \, c$.

2) $(a - b) \, . \, c = a \, . \, c - b \, . \, c$
d. h. eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man Minuendus und Subtrahendus mit der Zahl multiplicirt und das letztere Produkt vom ersteren subtrahirt.

Beweis. $(a - b) \, . \, c = (a - b) + (a - b) + \ldots\ldots (c \text{ mal})$.
Der Satz Nr. 1. des §. 8. läßt sich aber auch auf die Addition von mehr als zwei Differenzen ausdehnen, und durch Anwendung desselben erhält man:
$(a - b) \, . \, c = [a + a + \ldots\ldots (c \text{ mal})] - [b + b + \ldots\ldots (c \text{ mal})]$, oder
$(a - b) \, . \, c = a \, . \, c - b \, . \, c$.

§. 28.

Vertauscht man in den Formeln des §. 27. beide Seiten der Gleichungen und faßt sie in eine einzige zusammen, so daß entweder nur die beiden oberen oder nur die beiden unteren Zeichen zu gleicher Zeit gelten, so heißen sie

$$a \, . \, c \pm b \, . \, c = (a \pm b) \, . \, c$$

d. h. Sollen Produkte mit gleichen Multiplikatoren addirt oder subtrahirt werden, so addire oder sub-

trahire man nur die Multiplikanden, und multiplicire die erhaltene Summe oder Differenz mit dem Multiplikator.

Beispiele. $7a + 2a = (7 + 2) . a = 9a.$
$7a - 2a = (7 - 2) . a = 5a.$
$4a + a = 4a + 1 . a = (4 + 1) . a = 5a.$
$4a - a = 4a - 1 . a = (4 - 1) . a = 3a.$

§. 29.

Die Gesetze, welche die Beziehungen der Multiplikation für sich allein aussprechen, sind:

1) $(a . b) . c = (a . c) b$

d. h. Ein Produkt wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man nur den Multiplikandus mit der Zahl und das erhaltene Produkt mit dem Multiplikator multiplicirt.

Beweis. $(a . b) . c = ab + ab + ab \ldots\ldots$ (c mal).
Hier sind Produkte mit gleichem Multiplikator zu addiren, und wenn man dies nach §. 28. ausführt, so erhält man:
$(a . b) . c = [a + a + a + \ldots . (c\text{ mal})] . b.$
oder $(a . b) . c = (a . c) . b.$

2) $a . b = b . a$

d. h. Multiplikandus und Multiplikator oder die Faktoren eines Produkts können vertauscht werden.

Beweis. Statt a kann man nach §. 26. Nr. 2. auch $1 . a$ setzen, folglich ist $a . b = (1 . a) . b$, wendet man hierauf den Satz Nr. 1. dieses Paragraphen an, so ist auch $a . b = (1 . b) . a$, also auch nach §. 26. Nr. 2. $a . b = b . a$.

3) Die Sätze des §. 28. und §. 29. Nr. 1. können daher allgemeiner so ausgedrückt werden:

Sollen Produkte mit einem gleichen Faktor addirt oder subtrahirt werden, so multiplicire man die Summe oder Differenz der ungleichen Faktoren mit dem gleichen Faktor.

Ein Produkt wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man nur einen Faktor, beliebig welchen, mit der Zahl multiplicirt, den andern aber als solchen beibehält.

§. 30.

1) Durch Anwendung des vorigen Lehrsatzes ergiebt sich noch, daß in jedem durch bloße Multiplikation entstandenen Ausdrucke

die Ordnung der einzelnen Faktoren ganz beliebig ist. Man kann daher in einem solchen Ausdruck die eine bestimmte Ordnung festsetzenden Klammern weglassen, z. B.

$$[a . (b . c)] . d = abcd.$$

Dabei schreibt man die Faktoren des Produkts gern in der Ordnung, wie sie im Alphabet auf einander folgen, und wenn eine bestimmte, mit Ziffern geschriebene Zahl darunter ist, so setzt man diese allemal den übrigen Faktoren voran und nennt sie dann den Koefficient des Ausdrucks. So schreibt man z. B. nicht cab7, sondern 7abc.

2) Zwei Summen werden mit einander multiplicirt, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multiplicirt und die erhaltenen Produkte addirt. Es ist nämlich:

$$(a + b + c) . (m + n) = (a + b + c) . m + (a + b + c) . n$$
$$= am + bm + cm + an + bn + cn.$$

§. 31.

Eine Zahl a durch eine Zahl b dividiren heißt eine dritte Zahl finden, welche mit b multiplicirt a giebt. Diese dritte Zahl wird durch die Verbindung a : b oder $\frac{a}{b}$, welche ein Quotient heißt und „a durch b" ausgesprochen wird, bezeichnet. Dabei wird a der Dividendus und b der Divisor genannt.

Anmerkung 1. Daß der Begriff der Division sogleich aus dem der Multiplikation folgt, ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung. Es ist 3 . 2 = 6; wäre nun aus irgend einem Grunde der eine Faktor, z. B. 2, nicht genau zu erkennen, so entstände die Aufgabe, eine Zahl zu finden, welche mit 3 multiplicirt, 6 giebt. Da nun diese Zahl nicht immer gleich bekannt sein wird, so muß sie durch die beiden gegebenen Zahlen 3 und 6 dargestellt werden können, und dies geschieht entweder durch das Zeichen 6 : 3 oder $\frac{6}{3}$.

2. Der Satz Nr. 2. des §. 29. ist die Ursache, warum die beiden der Multiplikation entgegenstehenden indirekten Operationen in eine einzige, die Division, zusammenfallen.

3. Bezeichnet man den Dividendus mit D, den Divisor mit d und den Quotienten mit Q, so folgt, daß jede Division richtig ist, wenn Q . d = D ist.

4. Der Quotient a : b oder $\frac{a}{b}$ stellt nur dann eine wirkliche Zahl vor, wenn der Dividendus a ein Vielfaches vom Divisor b ist, denn nur in diesem Falle läßt sich eine Zahl denken, die mit b multiplicirt a giebt.

§. 32.

1) $\frac{a}{b} . b = a$

d. h. **Wird ein Quotient mit seinem Divisor multiplicirt, so erhält man den Dividendus.**

Beweis. $\frac{a}{b}$ ist ein Quotient, also nach §. 31. diejenige Zahl, welche mit b multiplicirt a giebt, folglich muß $\frac{a}{b} . b = a$ sein.

2) $\frac{a . b}{b} = a$

d. h. **Wird ein Produkt durch den einen Faktor dividirt, so erhält man den andern Faktor.**

Beweis. $a . b = D$, $b = d$ und a soll $= Q$ sein. Diese Division ist richtig, wenn $Q . d = D$, also wenn $a . b = a . b$ ist; woraus die Richtigkeit hervorgeht.

§. 33.

Da gleiche Ausdrücke für einander gesetzt werden können, so muß, wenn $a = b$ ist, auch $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ sein;

d. h. **Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches.**

§. 34.

Die Gesetze, nach welchen Produkte und Quotienten durch Multiplikation und Division mit einer Zahl verbunden werden, sind folgende:

1) $\frac{a . b}{c} = \frac{a}{c} . b = a . \frac{b}{c}$

d. h. **Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, wenn man nur einen Faktor, beliebig welchen, durch die Zahl dividirt und den anderen als solchen beibehält.**

Beweis des ersten Theils: $\frac{a . b}{c} = \frac{a}{c} . b$.

Hier ist $a . b = D$, $c = d$ und $\frac{a}{c} . b$ soll $= Q$ sein. Dies ist der Fall, wenn $Q . d = D$, also wenn

$$\left(\frac{a}{c} . b\right) . c = ab \text{ ist.}$$

Da nun hier nach Nr. 1. des §. 30. die Klammer weggelassen und die Faktoren vertauscht werden können, so ist der Satz auch noch richtig, wenn

$$\frac{a}{c} . c . b = ab \text{ ist.}$$

Dies ist aber der Fall, denn nach Nr. 1. des §. 32. ist $\frac{a}{c} . c = a$. Die Richtigkeit des zweiten Theils, nämlich:

$$\frac{a . b}{c} = a . \frac{b}{c}$$

ergiebt sich daraus, daß man die Faktoren a und b vertauschen kann.

2) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{b:c}$

d. h. **Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man entweder den Dividendus mit der Zahl multiplicirt und den Divisor als solchen beibehält, oder wenn man den Divisor durch die Zahl dividirt und den Dividendus als solchen beibehält.**

Beweis des ersten Theils: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$.

Vertauscht man beide Seiten der Gleichung, so erkennt man sogleich, daß daraus das Gesetz Nr. 1. dieses Paragraphen entsteht, welches so eben bewiesen worden ist.

Beweis des zweiten Theils: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b:c}$.

Hier findet man die Division auf der rechten Seite der Gleichung, und zwar ist $a = D$, $b:c$ oder $\frac{b}{c} = d$ und $\frac{a}{b} \cdot c$ soll $= Q$ sein. Dies ist der Fall, wenn:

$$Q \cdot d = D, \text{ also wenn}$$

$$\frac{a}{b} \cdot c \cdot \frac{b}{c} = a \text{ ist.}$$

$c \cdot \frac{b}{c}$ ist aber $= \frac{b}{c} \cdot c$, mithin $= b$ und $\frac{a}{b} \cdot b = a$, also die Richtigkeit des Satzes bewiesen.

3) $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b} = \frac{a}{b \cdot c}$

d. h. **Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, wenn man entweder den Dividendus durch die Zahl dividirt und den Divisor als solchen beibehält, oder wenn man den Divisor mit der Zahl multiplicirt und den Dividendus als solchen beibehält.**

Beweis des ersten Theils: $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b}$.

Hier ist $\frac{a}{b} = D$, $c = d$ und $\frac{a:c}{b}$ soll $= Q$ sein. Dieser ist richtig, wenn $Q \cdot d = D$, also wenn:

$$\frac{a:c}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

Hier soll ein Quotient mit einer Zahl multiplicirt werden, dies geschieht nach Nr. 2. dieses Paragraphen, indem man den Dividendus multiplicirt und den Divisor als solchen beibehält. Der Satz ist also auch dann richtig, wenn:

$$\frac{(a:c) \cdot c}{b} = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

$(a:c) \cdot c$ oder $\frac{a}{c} \cdot c$ ist aber $= a$, woraus die Richtigkeit hervorgeht.

Beweis des zweiten Theils: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$.

Hier ist $\frac{a}{b} = D$, $c = d$ und $\frac{a}{b \cdot c}$ soll $= Q$ sein; dies ist der Fall, wenn $Q \cdot d = D$, also wenn:

$$\frac{a}{b \cdot c} \cdot c = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

Ein Quotient kann aber auch nach Nr. 2. dieses Paragraphen dadurch mit einer Zahl multiplicirt werden, daß man den Divisor durch die Zahl dividirt und den Dividendus als solchen beibehält. Der Satz ist also auch noch richtig, wenn:

$$\frac{a}{(b.c):c} = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

(b.c):c oder $\frac{b.c}{c}$ ist aber nach Nr. 2. des §. 32. $= b$, mithin der Satz bewiesen.

4) $\frac{a}{b.c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b$

d. h. **Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, wenn man sie erst durch den einen Faktor und den erhaltenen Quotienten durch den andern Faktor dividirt.**

Beweis. Liest man die Formel von der Rechten zur Linken, d. h. so:

$$\frac{a}{c} : b = \frac{a:b}{c} = \frac{a}{b.c},$$

so erhält man das Gesetz des Satzes Nr. 3., welches so eben bewiesen worden ist.

5) $a . \frac{b}{c} = \frac{a.b}{c} = \frac{a}{c} . b$

d. h. **Eine Zahl wird mit einem Quotienten multiplicirt, wenn man die Zahl mit dem Dividendus multiplicirt und das erhaltene Produkt durch den Divisor dividirt, oder wenn man die Zahl zuerst durch den Divisor dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem Dividendus multiplicirt.** *)

Beweis. Daß $\frac{a.b}{c} = \frac{a}{c} . b = a . \frac{b}{c}$ ist, ergiebt sich aus dem Satz Nr. 1. dieses Paragraphen.

6) $a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} . c = \frac{a.c}{b}$

d. h. **Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man die Zahl durch den Dividendus dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, oder wenn man zuerst die Zahl mit dem Divisor multiplicirt und das erhaltene Produkt durch den Dividendus dividirt.** **)

---

*) In beiden Fällen wird mit dem Dividendus multiplicirt und durch den Divisor dividirt.

**) In beiden Fällen wird durch den Dividendus dividirt und mit dem Divisor multiplicirt. Dieser Satz wird aber auch häufig so ausgedrückt: Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man diesen umkehrt und mit der Zahl multiplicirt.

Beweis. Daß $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} = \frac{a}{b : c}$ ist, ergiebt sich aus dem Satz Nr. 2. dieses Paragraphen.

§. 35.

Die Gesetze, nach welchen Produkte und Quotienten untereinander durch Multiplikation und Division verbunden werden, sind folgende:

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

d. h. **Zwei Quotienten werden multiplicirt, wenn man das Produkt der Dividenden durch das Produkt der Divisoren dividirt.**

Beweis. Hier liegt die Division auf der rechten Seite der Gleichung, und zwar ist $a \cdot c = D$, $b \cdot d = d$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ soll $= Q$ sein; dies ist der Fall, wenn $Q \cdot d = D$, also wenn:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot b \cdot d = a \cdot c \text{ ist.}$$

Dies ist aber richtig, denn wenn man die Faktoren vertauscht und dann den Satz Nr. 1. §. 32. anwendet, so erhält man

$$a \cdot c = a \cdot c.$$

Anmerkung. Vertauscht man beide Seiten der obigen Gleichung und spricht sie dann in Worten aus, so heißt sie: **Zwei Produkte werden durch einander dividirt, wenn man ihre Faktoren einzeln durch einander dividirt und die erhaltenen Quotienten multiplicirt.**

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

d. h. **Zwei Quotienten werden durch einander dividirt, wenn man den Quotienten der beiden Dividenden durch den Quotienten der beiden Divisoren dividirt, oder wenn man den zweiten Quotienten umkehrt und mit dem ersten multiplicirt.**

Beweis des ersten Theils: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$.

Hier ist $\frac{a}{b} = D$, $\frac{c}{d} = d$ und $\frac{a : c}{b : d}$ soll $= Q$ sein, dies ist der Fall, wenn $Q \cdot d = D$, also wenn:

$$\frac{a : c}{b : d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

Führt man die Multiplikation der beiden Quotienten nach Nr. 1. aus, so ergiebt sich die Richtigkeit sofort.

Beweis des zweiten Theils: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Hier ist $\frac{a}{b} = D$, $\frac{c}{d} = d$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ soll $= Q$ sein, dies ist der Fall,

wenn Q . d = D, also wenn:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

Betrachtet man nun $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ als einen einzigen Ausdruck und multiplicirt ihn nach der Regel des §. 34. Nr. 5. mit $\frac{c}{d}$, so ist der Satz auch richtig, wenn:

$$\frac{\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot c}{d} = \frac{a}{b}, \text{ oder wenn}$$

$$\frac{\frac{a}{b} \cdot d}{d} = \frac{a}{b} \text{ ist. Dies ist aber nach Nr. 2. des §. 32.}$$

der Fall.

§. 36.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

d. h. **der Werth eines Quotienten bleibt unverändert, wenn man Dividendus und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt.**

Beweis. a = D, b = d und $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ soll = Q sein, dies findet statt, wenn Q . d = D, also wenn $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} \cdot b = a$ ist.

Ein Quotient wird aber nach Nr. 2. des §. 34. mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den Divisor durch die Zahl dividirt und den Dividendus als solchen unverändert läßt. Der Satz ist also richtig, wenn $\frac{a \cdot c}{c} = a$ ist, was aus Nr. 2. des §. 32. hervorgeht.

Anmerkung. Vertauscht man beide Seiten der Gleichung und spricht sie dann in Worten aus, so heißt sie:

Der Werth eines Quotienten bleibt unverändert, wenn man Dividendus und Divisor durch dieselbe Zahl dividirt.

§. 37.

Die Gesetze, welche die Beziehungen der Division zur Addition und Subtraktion angeben, sind:

1) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

d. h. **Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jeden Summanden durch die Zahl dividirt und die erhaltenen Quotienten addirt.**

Beweis. a + b = D, c = d und $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = Q$. Dieser ist richtig, wenn Q . d = D, also wenn

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \cdot c = a + b \text{ ist.}$$

Eine Summe wird aber nach Nr. 1. des §. 27. mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Summanden mit derselben multiplicirt und die erhaltenen Produkte addirt. Es muß daher $\frac{a}{c} . c + \frac{b}{c} . c = a + b$ sein, was aber nach Nr. 1. des §. 32. unzweifelhaft ist.

2) $\frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$

d. h. Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man sowohl Minuendus als auch Subtrahendus durch dieselbe dividirt und den letzeren Quotienten vom ersteren subtrahirt.

Beweis. Ganz analog dem vorigen.

§. 38.

1) Vertauscht man in den Formeln des §. 37. beide Seiten der Gleichungen und faßt sie wie im §. 28. in eine einzige zusammen, so heißen diese:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

d. h. Quotienten mit gleichen Divisoren werden addirt oder subtrahirt, indem man die Summe oder Differenz ihrer Dividenden durch den gleichen Divisor dividirt.

2) Für den Fall, in welchem eine Zahl durch eine Summe oder Differenz dividirt werden soll, läßt sich kein einfaches Gesetz angeben.

3) Sollen Quotienten, welche ungleiche Divisoren haben, addirt oder subtrahirt werden, so müssen sie erst auf einen gleichen Divisor gebracht werden. Dies geschieht, indem man Divisor und Dividendus eines jeden Quotienten mit dem Produkt der Divisoren aller übrigen Quotienten multiplicirt, wodurch nach §. 36. alle Quotienten ihrem Werthe nach unverändert bleiben, z. B.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{g} = \frac{adg}{bdg} + \frac{bcg}{bdg} + \frac{bde}{bdg} = \frac{adg + bcg + bde}{bdg}$$

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq}{nq} - \frac{np}{nq} = \frac{mq - np}{nq}.$$

Anmerkung. Was den Gebrauch der Klammern anbetrifft, so pflegt man Produkte und Quotienten, welche addirt oder subtrahirt werden sollen, nicht in Klammern einzuschließen, indem man

annimmt, daß die höhere Operation dann den Vorzug hat; dagegen muß dies mit Summen und Differenzen, welche multiplicirt oder dividirt werden sollen, jedesmal geschehen, ausgenommen, wenn man sich des Divisionsstriches bedient.

So schreibt man z. B. statt (ab) + (cd) nur ab + cd, oder statt $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}\right)$ kürzer $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, wie dies auch bisher schon geschehen ist. Man darf aber statt (a + b) . (c + d) niemals schreiben a + b . c + d, indem dies a + (b . c) + d bedeuten würde, wohl aber kann man statt (a + b) : (c + d) setzen $\frac{a+b}{c+d}$.

§. 39.

Wenn $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{d}{\delta}$, dann ist jeder dieser Quotienten auch gleich

$$\frac{a \pm b \pm c \pm d}{\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \delta} \text{ oder gleich } \frac{an \pm br \pm cp \pm ds}{\alpha n \pm \beta r \pm \gamma p \pm \delta s}.$$

Beweis. Setzt man einen der obigen Quotienten z. B. $\frac{a}{\alpha} = q$, so sind nach der Voraussetzung auch alle anderen gleich q, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{\alpha} = q \\ \frac{b}{\beta} = q \\ \frac{c}{\gamma} = q \\ \frac{d}{\delta} = q \end{array}\right\} \text{dann ist auch, da man Divisor und Quotient vertauschen kann} \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{q} = \alpha \\ \frac{b}{q} = \beta \\ \frac{c}{q} = \gamma \\ \frac{d}{q} = \delta \end{array}\right.$$

Hieraus folgt durch Addition resp. Subtraktion

$$\frac{a \pm b \pm c \pm d}{q} = \alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \delta, \text{ oder}$$

$$\frac{a \pm b \pm c \pm d}{\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \delta} = q = \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{d}{\delta}.$$

Multiplicirt man die obigen Gleichungen $\frac{a}{q} = \alpha$; $\frac{b}{q} = \beta$; $\frac{c}{q} = \gamma$ und $\frac{d}{q} = \delta$, der Reihe nach mit n, r, p und s, so erhält man durch Addition, resp. Subtraktion derselben auch das andere Resultat:

$$\frac{an \pm br \pm cp \pm ds}{\alpha n \pm \beta r \pm \gamma p \pm \delta s} = \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{d}{\delta}.$$

Zweites Kapitel.

Erweiterte Auffassung der Gesetze der Multiplikation und Division. Specielle Zahlenformen, welche sich daraus ergeben.

§. 40.

Ebenso wie die Gesetze der Addition und Subtraktion, so müssen auch die Gesetze der Multiplikation und Division in einem allgemeineren Sinne aufgefaßt werden, indem auch sie unabhängig von der besonderen Bedeutung der verbundenen Buchstaben, nichts als das Verhalten der Operationen gegen einander aussprechen. Dann aber kommt es wieder darauf an, die speciellen Fälle, welche in den so allgemein aufgefaßten Operationsformen enthalten sind, kennen zu lernen und ihre Behandlung festzustellen.

§. 41.

$\frac{a}{a} = 1$

d. h. Jeder Ausdruck, dessen Dividendus gleich dem Divisor ist, ist gleich Eins.

Beweis. Der Quotient 1 ist richtig, weil er mit dem Divisor a multiplicirt nach Nr. 2 des §. 26. den Dividendus a giebt.

§. 42.

1) Es sind daher alle Quotienten, deren Dividendus gleich dem Divisor ist, einander gleich, z. B. $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{m}{m}$.

2) Da $1 . a = a$, so ist auch $a : 1 = a$

d. h. Jeder Ausdruck, durch Eins dividirt, bleibt unverändert.

§. 43.

Ein Quotient zweier wirklichen Zahlen, dessen Dividendus weder gleich dem Divisor, noch ein Vielfaches des Divisors ist, heißt ein Bruch oder eine gebrochene Zahl. Man schreibt einen Bruch vorzugsweise in der Form $\frac{a}{b}$, spricht ihn aus a, btel und nennt a seinen Zähler und b seinen Nenner. Ist $a < b$, so heißt $\frac{a}{b}$ ein ächter, ist $a > b$, so heißt $\frac{a}{b}$ ein unächter Bruch.

Jede wirkliche Zahl heißt zum Unterschiede von der gebrochenen auch eine ganze Zahl.

§. 44.

In dem allgemeinen Begriff des Quotienten zweier wirklichen Zahlen sind daher als specielle Fälle enthalten:

1) Die ganze Zahl, wenn der Dividendus ein Vielfaches vom Divisor ist,

2) die Eins, wenn der Dividendus gleich dem Divisor ist, und

3) die gebrochene Zahl oder der Bruch, wenn der Dividendus kein Vielfaches vom Divisor ist.

§. 45.

Da Brüche nichts anderes als Quotienten sind, so gelten für sie natürlich alle für Quotienten aufgestellten Gesetze. Die wichtigsten derselben werden gewöhnlich auf folgende Art ausgedrückt:

1) Wird ein Bruch mit dem Nenner multiplicirt, so erhält man den Zähler, z. B. $\frac{3}{7} . 7 = 3$.

2) Ein Bruch wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man entweder den Zähler mit der Zahl multiplicirt, oder seinen Nenner durch dieselbe dividirt, z. B. $\frac{3}{7} . 2 = \frac{6}{7}$ oder $\frac{3}{8} . 2 = \frac{3}{4}$.

3) Ein Bruch wird durch eine Zahl dividirt, indem man entweder seinen Zähler durch die Zahl dividirt, oder seinen Nenner mit derselben multiplicirt, z. B. $\frac{6}{5} : 3 = \frac{2}{5}$, oder $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

4) Eine Zahl wird durch einen Bruch dividirt, indem man den Bruch umkehrt und mit der Zahl multiplicirt, z. B. $3 : \frac{2}{5} = 3 . \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$.

5) Zwei Brüche werden mit einander multiplicirt, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt, z. B. $\frac{2}{3} . \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

6) Zwei Brüche werden durch einander dividirt, indem man den Divisorbruch umkehrt und mit dem ersteren multiplicirt, z. B. $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8}{9} . \frac{3}{2} = \frac{24}{18}$.

7) Ein Bruch (d. h. sein Werth) bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt, oder

beide durch dieselbe Zahl dividirt. Das Erstere nennt man das **Erweitern**, das Letztere das **Heben der Brüche**, z. B.

$$\frac{3}{4}=\frac{3.5}{4.5}=\frac{15}{20}, \text{ oder } \frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}.$$

8) Brüche, welche gleiche Nenner haben, werden addirt, oder subtrahirt, wenn man ihre Zähler addirt oder subtrahirt und dem Resultat denselben Nenner giebt, z. B.

$$\frac{6}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6+2+3}{5}=\frac{11}{5}; \text{ oder}$$
$$\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{6-2}{5}=\frac{4}{5}.$$

9) Sollen Brüche, welche ungleiche Nenner haben, addirt oder subtrahirt werden, so muß man ihnen erst einen und denselben Nenner geben. Dies geschieht vorläufig*) dadurch, daß man Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem Produkt aller übrigen Nenner multiplicirt, z. B.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3.5.3}{4.5.3}+\frac{4.2.3}{4.5.3}+\frac{4.5.1}{4.5.3}$$
$$=\frac{45}{60}+\frac{24}{60}+\frac{20}{60}+\frac{89}{60}.$$
$$\text{oder } \frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{3.5}{4.5}-\frac{4.2}{4.5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}.$$

§. 46.

Eine Summe, welche aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch besteht, z. B. $4+\frac{3}{5}$ nennt man auch eine **gemischte Zahl**. Ist eine gemischte Zahl mit Ziffern geschrieben, so läßt man gewöhnlich das + Zeichen weg, und schreibt die beiden Summanden ohne Weiteres neben einander, z. B. $4\frac{3}{5}$.

§. 47.

Alle Operationen mit gemischten Zahlen geschehen ganz nach den für Summen aufgestellten Gesetzen. In den meisten Fällen ist es jedoch bequemer, die gemischte Zahl, bevor man mit ihr operirt, **einzurichten**, d. h. der ganzen Zahl auch den Nenner

*) Wie gegebene Brüche jedesmal auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner (General-Nenner) gebracht werden, kann erst später gezeigt werden.

des Bruchs zu geben und dann beide Brüche zu addiren. So ist z. B. $4 + \frac{3}{5} = \frac{4.5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$.

§. 48.

Ein Quotient, dessen Dividendus Eins ist, heißt auch der **umgekehrte** oder **reciproke** Werth seines Divisors. So ist z. B. $\frac{1}{a}$ der umgekehrte Werth von a, und $\frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}$ der umgekehrte Werth von $\frac{b}{a}$ ꝛc.

Einen Quotienten, dessen Dividendus und Divisor einzeln oder beide zugleich Brüche sind, nennt man einen **gebrochenen Bruch**, z. B. $\frac{\frac{3}{4}}{7}$ oder $\frac{3}{\frac{2}{5}}$ oder $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$.

Dabei können auch Dividendus und Divisor wieder gebrochene Brüche sein, z. B. $\frac{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{5}}{\frac{2}{7}}$.

Um einen gebrochenen Bruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, braucht man nur die darin angedeuteten Divisionen, den früheren Gesetzen nach, auszuführen.

Drittes Kapitel.

Gesetze der Multiplikation und Division mit der Null, den positiven und negativen Zahlen und algebraischen Summen.

§. 49.

$0 . a = 0$

d. h. **Jedes Produkt, in welchem ein Faktor Null ist, ist selbst gleich Null.**

Beweis. $0 . a = (p - p) . a = ap - ap = 0$.

§. 50.

1) $(+ a) . (+ b) = + ab = ab$

2) $(- a) . (- b) = + ab = ab$

3) $(-a) \cdot (+b) = -ab$
4) $(+a) \cdot (-b) = -ab$

d. h. **Positive und negative Zahlen werden mit einander multiplicirt, indem man ihre Glieder multiplicirt und dabei die Regel anwendet: Gleiche Vorzeichen geben +, ungleiche —.**

Beweise. 1) $(+a) \cdot (+b) = a \cdot b$ nach §. 15.

2) $(-a) \cdot (-b) = (0-a) \cdot (0-b)$. Betrachtet man $(0-b)$ als einen einzigen Ausdruck und multiplicirt mit diesem die Differenz $0-a$ nach der Regel Nr. 2. des §. 27., so erhält man: $0 \cdot (0-b) - a \cdot (0-b)$, und durch nochmalige Anwendung derselben Regel: $0 \cdot (0-b) - (a \cdot 0 - a \cdot b)$. Da nun aber jedes Produkt, dessen einer Faktor gleich 0 ist, selbst gleich 0 ist, so muß sowohl $0 \cdot (0-b)$ als auch $a \cdot 0 = 0$ sein. Der erhaltene Ausdruck vereinfacht sich daher auf $0-(0-ab)$, welches nach Auflösung der Klammer $0-0+ab$ oder $+ab$ giebt.

3) $(-a) \cdot (+b) = (0-a) \cdot b = 0 \cdot b - a \cdot b = 0 - ab = -ab$.

4) $(+a) \cdot (-b) = a \cdot (0-b) = a \cdot 0 - a \cdot b = 0 - ab = -ab$.

§. 51.

1) Sind mehr als zwei negative Zahlen mit einander zu multipliciren, so wird ihr Produkt positiv oder negativ sein, je nachdem die Anzahl der Faktoren gerade oder ungerade ist, z. B.

$$(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) = (+ab) \cdot (-c) = -abc.$$

$$(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d) = (+ab) \cdot (+cd) = +abcd.$$

2) Das Vorzeichen eines Produkts beliebig vieler positiver und negativer Zahlen richtet sich daher stets nach der Anzahl der negativen Faktoren, z. B.

$$(-a) \cdot (+b) \cdot (-c) \cdot (-d) \cdot (+e) = -abcde.$$

§. 52.

$$\frac{0}{a} = 0$$

d. h. **Ein Quotient, dessen Dividendus Null ist, ist selbst gleich Null.**

Beweis. $\frac{0}{a} = \frac{p-p}{a} = \frac{p}{a} - \frac{p}{a} = 0$.

§. 53.

Eine Zahl, welche größer wird, als jede nur denkbare, nennt man eine **unendlich große Zahl** und bezeichnet dieselbe durch ∞.

Von den Quotienten, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots \frac{1}{b}$ ist jeder folgende kleiner als der vorhergehende. Ist b eine unendlich große Zahl, dann wird der Quotient $\frac{1}{b}$ kleiner als jede nur denkbare Zahl, d. h. $\frac{1}{b}$ nähert sich mit wachsendem b immer mehr der Null, oder $\frac{1}{\infty} = 0$; ebenso $\frac{a}{\infty} = 0$.

Nach §. 34. Nr. 6. ist $1 : \frac{1}{b} = b$. Ist nun b eine unendlich große Zahl, dann hat man $\frac{1}{0} = \infty$, und ebenso $\frac{a}{0} = \infty$.

Wird ein Ausdruck für bestimmte Zahlenwerthe zu $\frac{0}{0}$, so darf man daraus nicht schließen, daß derselbe unbestimmt sei, wie aus folgenden Beispielen erhellet:

1) Es wird $\frac{aa - bb}{a - b}$ für $b = a$.

$$\frac{aa - aa}{a - a} = \frac{0}{0}$$

und doch ist der Werth des obigen Ausdrucks gleich 2a, denn

$$\frac{aa - bb}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a - b} = a + b, \text{ und hieraus } = 2a.$$

2) $\frac{aa - 2ab + bb}{aa - bb} = 0$, wenn $b = a$ ist; denn

$$\frac{aa - 2ab + bb}{aa - bb} = \frac{(a - b)(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{a - b}{a + b} \text{ und}$$

$$\frac{a - a}{a + a} = \frac{0}{2a} = 0.$$

Mit dem Zeichen 0 und ∞ läßt sich nicht nach den Regeln der Arithmetik rechnen.

§. 54.

1) $(+ a) : (+ b) = + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

2) $(- a) : (- b) = + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

3) $(- a) : (+ b) = - \frac{a}{b}$

4) $(+ a) : (- b) = - \frac{a}{b}$

d. h. Zwei positive oder negative Zahlen werden durch einander dividirt, indem man ihre Glieder durch ein-

ander dividirt und dabei die Regel anwendet: Gleiche Vorzeichen geben +, ungleiche —.

Die Beweise folgen sämmtlich daraus, daß $Q \cdot d = D$ ist, wobei die Regel des §. 50. und Nr. 1. des §. 32. angewendet wird.

§. 55.

Zwei algebraische Summen A und B mit einander multipliciren oder durch einander dividiren heißt, das Produkt $A \cdot B$ oder den Quotienten $\frac{A}{B}$ wieder in eine algebraische Summe verwandeln.

§. 56.

Da algebraische Summen nichts anderes als Summen sind, deren Summanden aus positiven und negativen Zahlen bestehen, so wird man sie auch ganz nach der in Nr. 2. des §. 30. für die Multiplication von Summen gegebenen Regel multipliciren, dabei aber die Regel des §. 50. nicht außer Acht lassen. Die dabei anzuwendende zweckmäßigste Form zeigt nachstehendes Beispiel:

$$\begin{array}{r} 2aa - 3ab + bb \\ 3aa + 2ab + 4bb \\ \hline 6aaaa - 9aaab + 3aabb \qquad\qquad\qquad\qquad \\ + 4aaab - 6aabb + 2abbb \qquad\qquad \\ - 8aabb + 12abbb - 4bbbb \\ \hline 6aaaa - 5aaab - 11aabb + 14abbb - 4bbbb \end{array}$$

§. 57.

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B}$$

d. h. Zwei algebraische Summen werden durch einander dividirt, indem man den ersten Summanden des Quotienten ganz beliebig wählt, mit diesem dann den Divisor multiplicirt, das Produkt vom Dividendus subtrahirt und den erhaltenen Rest dividirt durch den Divisor, als zweiten Summanden daneben setzt.

Beweis. Hier ist $A = D$, $B = d$ und $x + \frac{A-Bx}{B}$ soll $= Q$ sein.

Dies ist der Fall, wenn $Q \cdot d = D$, also wenn

$$\left(x + \frac{A-Bx}{B}\right) \cdot B = A \text{ ist.}$$

Eine Summe wird aber nach Nr. 1. des §. 27. mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Summanden mit derselben multiplicirt und die erhaltenen Produkte addirt. Der Satz ist also auch noch richtig,

wenn $Bx + \frac{A-Bx}{B} \cdot B = A$ ist.

Dies findet aber statt, denn $\frac{A-Bx}{B} \cdot B$ ist nach Nr. 1. des §. 32. $= A - Bx$ und $Bx + A - Bx$ ist nach Nr. 4. des §. 24 $= A$.

§. 58.

1) Auf den zweiten Summanden $\frac{A-Bx}{B}$ kann man dasselbe Gesetz noch einmal anwenden, so daß der Quotient $\frac{A}{B}$ dadurch in eine Summe von drei Summanden verwandelt werden kann, und durch fortgesetzte Anwendung desselben Satzes können sich auch immer mehr Glieder dieser Summe ergeben.

2) Obgleich das erste Glied des Quotienten beliebig zu wählen ist, und auf diese Weise unendlich viele Summen gefunden werden können, welche dem gegebenen Quotienten gleich sind, so erlangt man in der Regel sogleich das einfachste Resultat, wenn man das erste Glied und dann ebenso alle folgenden dadurch bestimmt, daß man ein Glied des Dividendus durch ein Glied des Divisors dividirt, und dabei diese Glieder so wählt, daß sie einen möglichst einfachen Quotienten geben. Dies Verfahren, zugleich in seiner bequemsten Anordnung, stellt sich in folgendem Beispiel dar:

$$\begin{array}{l} m - n \mid am - cn + bn - an - bm + cm \mid a - b + c \\ \quad\quad am \quad\quad\quad\quad - an \\ \hline \quad\quad\quad - cn + bn - bm + cm \\ \quad\quad\quad\quad\quad + bn - bm \\ \hline \quad\quad\quad - cn + cm \\ \quad\quad\quad - cn + cm \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

3) Ergiebt sich bei der Division zweier algebraischer Summen durch einander endlich ein Rest, welcher gleich Null ist, wie dies in obigem Beispiel der Fall war, so sagt man, die Division ist aufgegangen. Tritt aber dieser Fall nicht ein, so setzt man die Division so lange fort, wie man will, wobei man aber nicht vergessen darf, den letzten Rest dividirt durch den Divisor als letztes Glied des Quotienten hinzuzufügen, oder man dividirt nur so lange, bis man ein bestimmtes Gesetz in der Aufeinanderfolge der Glieder erkennt und deutet dies durch einige Punkte, die man an das Ende des Quotienten setzt, an, z. B.

$$a - b \mid a \cdot a + b \cdot b \mid a + b + \frac{2bb}{a} + \frac{2bbb}{a(a-b)}.$$

$$\begin{array}{l}
a \cdot a \qquad - ab \\
\hline
+ ab + bb \\
+ ab - bb \\
\hline
+ 2bb \\
+ 2bb - \frac{2bbb}{a} \\
\hline
+ \frac{2bbb}{a}
\end{array}$$

oder:

$$1 - x \mid 1 \mid 1 + x + xx + xxx + \ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{l}
1 - x \\
\hline
+ x \\
+ x - xx \\
\hline
+ xx \\
+ xx - xxx \\
\hline
+ xxx
\end{array}$$

Dritter Abschnitt.

Begriff der reellen Zahlen. Vergleichung derselben in Bezug auf ihre Größe. Die reelle Zahlenreihe.

§. 59.

Uebersieht man nun die verschiedenen Resultate, zu denen man durch ein allgemeines Auffassen der 4 ersten Operationen gelangen kann, so findet sich, wenn man, wie dies nicht anders möglich ist, von der wirklichen (absoluten) Zahl ausgeht:

1) Daß man durch allgemeine Anwendung der Addition und Subtraktion zu drei speciellen Zahlformen, nämlich zu der positiven Zahl, der negativen Zahl und der Null gelangen kann;

2) Daß man durch bloße Multiplikation dieser speciellen Formen immer wieder zu denselben Formen gelangen muß;

3) Daß man durch Division außerdem noch entweder zur ganzen Zahl (die Eins mit eingeschlossen) oder zur gebrochenen Zahl, oder zur unendlich großen Zahl kommen kann, deren jede sowohl positiv als negativ sein kann.

Hierdurch ergeben sich 7 verschiedene Zahlformen, nämlich:

1) die positive ganze Zahl,
2) die negative ganze Zahl,
3) die positive gebrochene Zahl,
4) die negative gebrochene Zahl,
5) die Null,
6) die positive unendlich große Zahl, und
7) die negative unendlich große Zahl,

welche man unter der gemeinschaftlichen Benennung der **reellen Zahlen** begreift, und welches zugleich die einzigen Formen sind, zu denen man durch die 4 ersten Operationen kommen kann.

§. 60.

Sind p und q zwei beliebige reelle Zahlen, so heißt p **größer als** q, wenn die Differenz p — q gleich einer positiven Zahl ist; dagegen heißt p **kleiner als** q, wenn diese Differenz gleich einer negativen Zahl ist.

§. 61.

Sind a, b, c und d absolute ganze Zahlen und ist $a > b$, so wie $c > d$, so ist:

1) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

d. h. **Von zwei Brüchen, welche gleiche Nenner haben, ist derjenige der größere, welcher den größeren Zähler hat.**

Beweis. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, also positiv, da $a > b$.

2) $\frac{a}{c} < \frac{a}{d}$

d. h. **Von zwei Brüchen, welche gleiche Zähler haben, ist derjenige der kleinere, welcher den größeren Nenner hat.**

Beweis. $\frac{a}{c} - \frac{a}{d} = \frac{ad-ac}{cd} = \frac{a(d-c)}{cd}$, also negativ, da $d < c$ ist.

3) $\frac{a}{b} > 1$ und $\frac{b}{a} < 1$

d. h. **Jeder unächte Bruch ist größer und jeder ächte Bruch kleiner als Eins.**

Beweis. $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$, also positiv, da $a > b$ ist.
$\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$, also negativ, da $b < a$ ist.

§. 62.

Sind a und b absolute (beliebige ganze oder gebrochene) Zahlen, so folgt noch ferner:

1) Ist $a > b$, so ist auch $(+a) > (+b)$

d. h. Von zwei positiven Zahlen ist diejenige die größere, welche das größere Glied hat.

Beweis. $(+a) - (+b) = a - b$, also positiv, da $a > b$ ist.

2) Ist $a > b$, so ist $(-a) < (-b)$

d. h. Von zwei negativen Zahlen ist diejenige die größere, welche das kleinere Glied hat.

Beweis. $(-a) - (-b) = -(a - b)$, also negativ, da $a > b$ ist.

3) Es ist allemal $(+a) > (-b)$

d. h. Jede positive Zahl ist größer als jede negative Zahl.

Beweis. $(+a) - (-b) = +(a + b)$, also stets positiv.

4) Es ist allemal $0 < +a$ und $0 > -a$

d. h. Null ist kleiner als jede positive, aber größer als jede negative Zahl.

Beweis. $0 - (+a) = -a$, also negativ, und $0 - (-a) = +a$, also positiv.

§. 63.

Die in den beiden vorigen Paragraphen ausgesprochenen Beziehungen, die gegenseitige Größe der reellen Zahlen betreffend, lassen sich noch mehr veranschaulichen, wenn man sämmtliche reellen Zahlen in einer Reihe neben einander denkt, welche von der Null aus nach zwei entgegengesetzten Richtungen fortgeht. Berücksichtigt man dabei nur die positiven und negativen ganzen Zahlen, so stellt sich diese Reihe, wie folgt dar:

$-\infty \ldots -(n+1), -n, \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots n, (n+1) \ldots \ldots \infty.$

Zwischen je zwei dieser Zahlen können und müssen nun aber noch unendlich viele gebrochene Zahlen gedacht werden.

Uebungen zum zweiten Abschnitt.

I. Addition und Subtraktion von Produkten.

(Zu §. 28.)

1. $(2a - 3b) - (5a + 6b) + (3a + 9b) = 0.$
2. $(2a + 3x) - (4a - x + b) = -2a + 4x - b.$
3. $(a - 2b) + (3a + 5b) - (2a + 6b) = 2a - 3b.$

4. $(2a + b) - (3a + 2b) - (2a - 3b) + (a - 5b) + 4a = 2a - 3b$.
5. $(a + b) - (2a - 3b) - (5a + 7b) - (-13a + 2b) = 7a - 5b$.
6. $9b - 2c - (2b - 3c) + (4a - 5b) - (3a + 2b + c) = a$.
7. $3a + c + (5a - 4b) - (3b - 2c) - (5a - 2b + 3c) = 3a - 5b$.
8. $5a + 6b - (3a + 4c) - (2a + 5b - 3c) - (a - 2c) = -a + b + c$.
9. $-(-6a - 8b + 4c) - (2b - 3c + 5a) - (5b - 2c) + (b + c - a)$ $= 2b + 2c = 2(b + c)$.
10. $5a - 7b - (2a - 3b + 5c) - (3a - 4b - c) + 4c = 0$.
11. $3a - [2a - (3a - 2b) + 2b] = 4(a - b)$.
12. $2b + 5c - [(3a - b) - (4a - 2c)] - (a - 2b + 3c) = 5b$.
13. $2a + 3b + c - [2a - (2b - 3c) - (3a - 6b)] - (3a - b - 2c) = 0$.
14. $3xy + 4y - [(2xy + 3y) - (2y + 5x - 2xy)] - 5x = y(3 - x)$.
15. $37a - 48b - [18c - (12a + 3b) - (2c - 4b)] - 33c = 49(a - b - c)$.
16. $(6a - 8b - 3c) - [4a - 8b - (2c - 5b) - (4a + 3b) + (8a + 2c)]$ $= -2a - 2b - 3c$.
17. $44x + [32y - (6z + 3y - 7x) + 4z] - [32y - 8x + 2z - (4x + y)]$ $- (36x - 2y) + 4z = 27x$.
18. $4x - [(a - 4x) + (3y + 17a) - (98x + 3y)] + 18a - 106x = 0$.
19. $25a - 19b - \{3b - [4a - (5b - 6c) - 8a]\} - (21a - 27b) = 6c$.
20. $(3a - 2b - 4c) - \{(3c - 2b) - [(6a - 5c) - (7b + 3c)] - (3a - 4b$ $+ 5c)\} = 12a - 11b - 10c$.

II. Multiplikation und Division positiver und negativer Zahlen, sowie über die Reihenfolge, in welcher die Operationszeichen angewendet werden müssen.

(Zu §. 38. Anmerkung, sowie zu §. 50. und 54.)

1. $6 - 8 . 3 + 3 - 5 . 2 - 8 = -33$.
2. $(6 - 8) . 3 + (3 - 5) . (2 - 8) = 6$.
3. $(6 - 8) . 3 + 3 - 5 . (2 - 8) = 27$.
4. $(6 - 8) . 3 + (3 - 5) . 2 - 8 = -18$.
5. $(6 - 8) . [3 + (3 - 5) . 2 - 8] = 18$.
6. $[6 - (8 . 3 + 3 - 5)] . (2 - 8) = 96$.
7. $48 - 8 : 8 - 12 - 20 : 4 + 16 = 46$.
8. $(48 - 8) : 8 - (12 - 20) : 4 + 16 = 23$.
9. $48 - 8 : (8 - 12) - 20 : (4 + 16) = 49$.
10. $(48 - 8) : (8 - 12) - (20 : 4 + 16) = -31$.
11. $[(20 - 2) : 3 - 4 . (2 - 8)] : 5 - 1 = 5$.
12. $\{[(60 - 80) : 4 + 9] : 2 - (3 - 5) . 7 - 4\} : 3 = 4$.

III. Substitution von Zahlenwerthen.

Was wird aus folgenden Ausdrücken, wenn $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$ ist?

1. $2a + 3b + 4c$; 2. $2a + 2b - c$; 3. $5a + 4b - 6c$; 4. $5a - 4b - 3c$; 5. $ab + ac + bc$; 6. $ab - ac + bc$; 7. $ab - ac - bc$; 8. abc

$+a-b+c$; 9. $aa+bb+cc$; 10. $aa-bb-cc$; 11. $abc\,(a+b)(a-b)(b-c)$; 12. $aa-2ab+cc$; 13. $aaab-4abbc-ccc$; 14. $(aa+bb)(bb-cc)$; 15. $\frac{abc}{a+b+c}$; 16. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}-\frac{c}{a}$; 17. $3a-\frac{b+c}{4}$; 18. $\frac{3a}{5b}-\frac{b}{3c}$; 19. $12a-\frac{3b+4c}{8}$; 20. $\frac{ab}{b+c}+\frac{a+b}{bc}$; 21. $\frac{ab+bc}{5a-6b-3c}$; 22. $\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b-5c$; 23. $\frac{aa}{b-c}-\frac{bb}{a-c}$; 24. $\frac{aa}{2b-c}-\frac{bb}{3a-c}-\frac{cc}{4a-b}$; 25. $\frac{4aa}{b+c}-\frac{3bb}{a-c}+\frac{2cc}{2a+3b-4c}$.

Antw. 1. 38; 2. 9; 3. 1; 4. -16; 5. 47; 6. 17; 7. -23; 8. 64; 9. 50; 10. -32; 11. 420; 12. 10; 13. -977; 14. -225; 15. 5; 16. $-\frac{7}{60}$; 17. $6\frac{3}{4}$; 18. $\frac{11}{60}$; 19. 32; 20. $\frac{101}{60}$; 21. $-\frac{4}{3}$; 22. -20; 23. -1; 24. $-4\frac{1}{5}$; 25. 3.

IV. Ueber die Brüche.

(Zu §. 45—48.)

1. $4-(\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}-\frac{3}{4})=1$.
2. $1\frac{1}{3}-[\frac{1}{3}-(2\frac{1}{2}-\frac{2}{3})+\frac{5}{6}]=2$.
3. $1\frac{3}{8}-(1-\frac{2}{3})-(\frac{1}{6}-2\frac{1}{8})=3$.
4. $3\frac{5}{8}-[1\frac{1}{5}-(\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-2)-1\frac{3}{10}]+1\frac{1}{15}=4$.
5. $\frac{20}{3}\cdot(2\frac{1}{2}-\frac{4}{5})\cdot[-(1\frac{1}{3}-2\frac{5}{6})]=17$.
6. $(2\frac{2}{3}-1\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{5}+2\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{21}-(10\frac{1}{2}-12\frac{3}{4})\cdot\frac{6}{7}+13\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{70}=3$.
7. $[3\frac{2}{3}-4:\frac{1}{2}-(2\frac{1}{4}-3\frac{1}{3}-5)+8\frac{7}{12}]:1\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=7$.
8. $\{[3\frac{1}{2}-2:(4-2\frac{1}{3})+2\frac{1}{3}]:\frac{1}{10}-6\frac{1}{2}\}:2-2=18$.
9. $(1-5\frac{2}{3}):[4\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}\cdot(1\frac{1}{2}-3)]=8$.
10. $3\frac{1}{2}-2:3+\frac{1}{4}:\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}:2-(\frac{2}{5}-1\frac{1}{3}):\frac{1}{60}=60$.
11. $\frac{2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{2}}-1\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{4}}=2$.
12. $\frac{3\frac{1}{2}}{2}+\frac{3}{1\frac{1}{3}}-\frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}}+\frac{2-1\frac{1}{2}}{3}+\frac{\frac{1}{3}-1\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}}=3$.
13. $(\frac{25}{48}+\frac{7}{6}-\frac{3}{4})\cdot(\frac{8}{9}-\frac{4}{5}):(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})=\frac{1}{17}$.
14. $(\frac{13}{2}+\frac{13}{3})(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}):(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})(\frac{1}{8}-\frac{1}{9})=126$.
15. $(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}:\frac{4}{5}+\frac{1}{2}):(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}:\frac{4}{5}-\frac{1}{2})-\frac{9\frac{3}{4}}{5\frac{3}{4}-1\frac{1}{3}}=-2$.
16. $\frac{4\frac{1}{2}-1}{(1:1\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{4})}-\frac{2\cdot(8-1\frac{1}{3})}{(4\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}:5):\frac{3}{2}}=2$.
17. $\left(\frac{3\frac{1}{8}-1\frac{1}{3}}{2}-\frac{(1\frac{1}{2}-\frac{1}{6}):1\frac{3}{7}}{1\frac{2}{3}}\right):1\frac{43}{60}=\frac{1}{4}$.
18. $\left(\frac{3\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}:\frac{4\cdot(2\frac{1}{4}-\frac{1}{3})}{1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{2\frac{3}{5}\cdot5\frac{1}{8}}{3\frac{1}{8}:4}=9$.
19. $\left(\frac{8:2\frac{1}{2}}{(\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}):5\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}:2}{1\frac{1}{4}-\frac{3}{2}}-\frac{2:3}{1-2\frac{1}{4}}\right):\frac{(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}):\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-5}=211$.
20. $\frac{(\frac{1}{3}-1)\cdot2\frac{2}{3}}{[1:(\frac{3}{4}:2)]\cdot(1-\frac{2}{3})}+\frac{8-2:\frac{1}{4}}{4:(1-5)}+\frac{(3\frac{1}{2}-\frac{1}{2})(1-2\frac{1}{4})}{\frac{3}{4}-2}-\frac{2-6}{\frac{1}{2}-3:\frac{2}{3}}=0$.

V. Multiplikation und Division algebraischer Summen.

(Zu §. 56. und 58.)

1. $(2ab - 3ac + \frac{1}{2}bc)\,3a = 6aab - 9aac + \frac{3}{2}abc.$
2. $(2ax - 3bx + 5c)\,5x = 10axx - 15bxx + 25cx.$
3. $(\frac{1}{4}x + 3y - \frac{1}{2}xy)\,.\,(-4x) = -xx - 12xy + 2xxy.$
4. $(5aa - 4ab + 3ac + 2bc)\,.\,\frac{3a}{2} = \frac{15aaa}{2} - 6aab + \frac{9aac}{2} + 3abc.$
5. $(-2ab + \frac{3}{2}ac - \frac{4}{3}bc + \frac{3}{4})\,.\,(-12a) = 24aab - 18aac + 16abc - 9a.$
6. $(4ab - 6ac + 12ad) : 2a = 2b - 3c + 6d.$
7. $(15xyy + 12xy - 3xx) : 3x = 5yy + 4y - x.$
8. $(18abx - 24acx + 30axx) : 6ax = 3b - 4c + 5x.$
9. $(-10aab + 15abb - 35abx) : (-5b) = 2aa - 3ab + 7ax.$
10. $(\frac{1}{4}xxy - \frac{3}{2}xyy + \frac{1}{5}xy) : \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x - 3y + \frac{2}{5}.$
11. $(\frac{3}{8}aaa - \frac{1}{4}aab + \frac{3}{7}aabb) : (-\frac{1}{4}aa) = -\frac{3}{2}a + b - \frac{12}{7}bb.$
12. $\left(\frac{aa}{cd} - \frac{abb}{ccd} + \frac{ab}{dd}\right) : \frac{ab}{cd} = \frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{d}$
13. $(2a + 3b)(2a + 3b) = 4aa + 12ab + 9bb.$
14. $(7a + 3x)(7a + 3x) = 49aa + 42ax + 9xx.$
15. $(5x - 2y)(5x - 2y) = 25xx - 20xy + 4yy.$
16. $\left(\frac{3a}{2} - \frac{2b}{3}\right)\left(\frac{3a}{2} - \frac{2b}{3}\right) = \frac{9aa}{4} - 2ab + \frac{4bb}{9}.$
17. $(2a + 3b)(3a - 2b) = 6aa + 5ab - 6bb.$
18. $\left(\frac{3a}{2} + \frac{2b}{3}\right)\left(\frac{3a}{2} - \frac{2b}{3}\right) = \frac{9aa}{4} - \frac{4bb}{9}.$
19. $(16aaa + 4aab + abb + \frac{1}{4}bbb)(4a - b) = 64aaaa - \frac{1}{4}bbbb.$
20. $(a + b + c)(a + b - c) = aa + 2ab + bb - cc.$
21. $(a + 2b + 3c)(2a - c) = 2aa + 4ab + 5ac - 2bc - 3cc.$
22. $(a + 2b + 3c)(3a + 2b + c) = 3aa + 8ab + 10ac + 4bb + 8bc + 3cc.$
23. $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \frac{aa}{bc} + \frac{ad}{bb} - \frac{bc}{dd} - \frac{cc}{ad}.$
24. $\left(\frac{2a}{b} - \frac{b}{3a} + 2c\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) = \frac{2aa}{bb} + \frac{2ac}{b} + \frac{bb}{3aa} - \frac{2bc}{a} + \frac{2ac}{bb} - \frac{c}{3a} + \frac{2cc}{b} - \frac{7}{3}.$
25. $(a + b + c)(a - b - c) - (a - b + c)(a + b - c) = -4bc.$
26. $(3a + 4b - 5c)(2a - b) - (5a - 4b + 3c)(a - 2b) = aa + 19ab - 13ac - 12bb + 11bc.$
27. $(a + 2b + 3c)(a - 2b + 3c) - (-a + 2b + 3c)(a + 2b - 3c) = 2aa - 8bb + 18cc.$
28. $(5a - 3b + 2c)(7a + 3b - 5c) - (5a - 3b)(2a - 3c) - (7b + 4c)(3a - 5b) = 25aa - 21ab - 8ac + 26bb + 32bc - 10cc.$
29. $(10ab - 6bc - 35ad + 21cd) : (5a - 3c) = 2b - 7d.$
30. $(4aa - bb - 2bc - cc) : (2a + b + c) = 2a - b - c.$

31. (16abc — 4abd — 12ac + 6aab — 4aabb — dd + 8cd + 3ad — 16cc): (2ab — 4c + d) = 3a — 2ab + 4c — d.

32. (25aabb — 9aacc + 12abcc — 4bbcc): (5ab — 3ac + 2bc) = 5ab + 3ac — 2bc.

33. (aaaa + 64bbbb): (aa — 4ab + 8bb) = aa + 4ab + 8bb.

34. (aaaa + 4aabb — 32bbbb + aacc — 16bbcc — 2cccc): (aa — 4bb — cc) = aa + 8bb + 2cc.

35. $\left(\frac{aa}{2}+\frac{193}{120}ab-bb\right):\left(\frac{2a}{3}+\frac{5b}{2}\right)=\frac{3a}{4}-\frac{2b}{5}.$

36. $\left(\frac{aa}{4}-\frac{4bb}{9}+\frac{4bc}{15}-\frac{cc}{25}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}+\frac{c}{5}\right)=\frac{a}{2}+\frac{2b}{3}-\frac{c}{5}.$

37. $\left(\frac{aab}{3}-\frac{4aac}{9}+\frac{43abc}{20}-\frac{3abb}{8}-\frac{9bbc}{20}-\frac{5acc}{3}+\frac{3bcc}{2}\right):\left(\frac{2a}{3}-\frac{3b}{4}+\frac{5c}{2}\right)=\frac{ab}{2}-\frac{2ac}{3}+\frac{3bc}{5}.$

38. $\left(\frac{8aabb}{15}-\frac{3aabc}{2}-\frac{142abbc}{225}+\frac{15aacc}{16}+\frac{17abcc}{120}-bbcc\right):\left(\frac{8ab}{9}-\frac{5ac}{6}+\frac{4bc}{5}\right)=\frac{3ab}{5}-\frac{9ac}{8}-\frac{5bc}{4}.$

39. $\frac{1}{6}ab\,[1-3ab\,(4+7a)]-\frac{1}{2}b\,[2\tfrac{1}{3}a-6ab\,(1\tfrac{1}{2}aa+3a)+14aab]=aaabb-ab.$

40. $\frac{1}{18}\,[6a-\frac{3}{4}b\,(7a-\frac{1}{2})-\frac{1}{3}x]+\frac{1}{48}\,(14ab-15a+\frac{8}{9}x)=\frac{1}{48}\,(a+b).$

Vierter Abschnitt.

Allgemeine Gesetze der Potenzirung.

§. 64.

Eine Zahl a mit einer andern Zahl b **potenziren** heißt die Zahl a so oft als Faktor setzen, wie b Einheiten hat. Die durch diese Operation bestimmte dritte Zahl wird durch die Verbindung a^b, welche eine **Potenz** heißt und a hoch b oder a zur bten Potenz ausgesprochen wird, bezeichnet. Dabei heißt a die **Basis** (auch der **Dignand**) und b der **Exponent**. Insbesondere heißt a^2 das **Quadrat**, a^3 der **Cubus** und a^4 das **Biquadrat** von a*).

---

*) Die Potenzirung behandelt daher nur einen speziellen Fall der Multiplikation, nämlich den, wo die Faktoren einander gleich sind.

§. 65.

1) Die Potenz a^b hat daher vorläufig nur dann eine Bedeutung, wenn der Exponent b eine absolute (positive) ganze Zahl ist.

2) Ist $a = b$, so ist auch $a^m = b^m$
d. h. Gleiches mit Gleichem potenzirt giebt Gleiches.

3) Es ist a^b nicht immer $= b^a$
d. h. Basis und Exponent lassen sich nicht immer vertauschen.

z. B. $3^2 = 9$ und $2^3 = 8$.
Hierin liegt zugleich der Grund, weshalb der Potenzirung zwei verschiedene indirekte Operationen gegenüberstehen.

§. 66.

1) $1^a = 1$
d. h. Eins mit jeder Zahl potenzirt giebt Eins.
Beweis. $1^a = 1 . 1 . 1 \ldots\ldots$ (amal) $= 1$ nach Nr. 2. des §. 26.

2) $0^a = 0$.
d. h. Null mit jeder Zahl potenzirt giebt Null.
Beweis. $0^a = 0 . 0 . 0 \ldots\ldots$ (amal) $= 0$ nach §. 49.

§. 67.

1) $a^{b+c} = a^b . a^c$
d. h. Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt, indem man die Zahl mit jedem Summanden potenzirt und die erhaltenen Potenzen multiplicirt; oder umgekehrt:

Zwei Potenzen, welche gleiche Basis haben, werden multiplicirt, indem man die gleiche Basis mit der Summe der Exponenten potenzirt.

Beweis $a^{b+c} = a . a . a . a \ldots\ldots (b + c\text{mal})$
$= [a . a . a \ldots\ldots (b\text{mal})] . [a . a . a \ldots\ldots (c\text{mal})]$
$= a^b . a^c$.

2) $a^{b-c} = a^b : a^c$ *)
d. h. Eine Zahl wird mit einer Differenz potenzirt, indem man sie mit Minuendus und Subtrahendus poten-

*) Es ist hier nicht zu vergessen, daß der Exponent allemal eine positive Zahl sein muß, deshalb gilt dies Gesetz vorläufig nur für den Fall, daß $b > c$ ist.

zirt und die erstere Potenz durch die letztere dividirt; oder umgekehrt:

Zwei Potenzen, welche gleiche Basis haben, werden durch einander dividirt, indem man den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus subtrahirt und mit der erhaltenen Differenz die gleiche Basis potenzirt.

Beweis. Hier ist $a^b = D$, $a^c = d$ und a^{b-c} soll $= Q$ sein, dies ist der Fall, wenn $Q \cdot d = D$, also wenn

$$a^{b-c} \cdot a^c = a^b \text{ ist.}$$

Multiplicirt man beide Potenzen nach der Regel Nr. 1. dieses §., so erhält man $a^{(b-c)+c} = a^b$, woraus die Richtigkeit erhellet.

3) $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$

d. h. Eine Zahl wird mit einem Produkt potenzirt, indem man sie erst mit dem einen, und die erhaltene Potenz mit dem anderen Faktor potenzirt; oder umgekehrt:

Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenzirt.

Beweis. $(a^b)^c = a^b \cdot a^b \cdot a^b \ldots\ldots$ (amal).
Das Gesetz Nr. 1. läßt sich aber leicht auf mehr als zwei Potenzen, die gleiche Basis haben, ausdehnen und durch Anwendung desselben erhält man

$$(a^b)^c = a^{b+b+b+\ldots\ldots} \text{ (cmal)} = a^{b \cdot c}.$$

Anmerkung. Da man die Faktoren eines Produkts vertauschen kann, so ist auch $a^{b \cdot c} = (a^c)^b$.

4) $(ab)^c = a^c \cdot b^c$

d. h. Ein Produkt wird mit einer Zahl potenzirt, indem man jeden Faktor mit derselben potenzirt und die erhaltenen Potenzen multiplicirt; oder umgekehrt:

Zwei Potenzen, welche gleiche Exponenten haben, werden multiplicirt, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

Beweis. $(ab)^c = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \ldots\ldots$ (cmal)
$= [a \cdot a \cdot a \ldots\text{(cmal)}] \cdot [b \cdot b \cdot b \ldots \text{(cmal)}]$
$= a^c \cdot b^c$.

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$

d. h. Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl potenzirt, indem man Dividendus (Zähler) und Divisor (Nenner) mit derselben potenzirt und die erstere Potenz durch die letztere dividirt; oder umgekehrt:

Zwei Potenzen, welche gleiche Exponenten haben, werden durch einander dividirt, indem man den Quotienten ihrer Basen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots (c \text{ mal})$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots (c \text{ mal})}{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots (c \text{ mal})} = \frac{a^c}{b^c}.$$

§. 68.

1) In den Lehrsätzen 1. und 2. des vorigen Paragraphen sind zwar die Gesetze enthalten, wie eine Zahl mit einer Summe oder Differenz (sobald letztere eine ganze positive Zahl ist) potenzirt wird; aber nicht, wie eine Summe oder Differenz mit einer Zahl potenzirt wird. Es kann nämlich die Potenz $(a \pm b)^n$ nicht allgemein umgewandelt werden, und namentlich würde es ein grober Verstoß sein, dafür $a^n \pm b^n$ zu setzen. Das ziemlich verwickelte Gesetz für eine solche Umwandlung ist unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes bekannt, und kann für jeden bestimmt gegebenen Exponenten durch bloße Ausführung der angedeuteten Multiplikation gefunden werden. Für die Exponenten 2 und 3, welches zugleich die einzigen, in den gewöhnlichen Anwendungen vorkommenden Fälle sind, merke man:

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

2) Multiplicirt man $a + b$ mit $a - b$, so erhält man $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$; d. h. Die Summe zweier Zahlen multiplicirt mit ihrer Differenz giebt die Differenz der Quadrate beider Zahlen; oder umgekehrt: Die Differenz zweier Quadrate ist gleich der Summe mal der Differenz ihrer Basen.

3) Aus $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ folgt

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2.$$

Hierdurch erhält man ein Mittel, das Quadrat einer Zahl auf leichte Art zu finden, z. B.

$$12^2 = (12 + 2)(12 - 2) + 2^2$$
$$= 14 . 10 + 4 = 144; \text{ oder}$$
$$91^2 = (91 + 9)(91 - 9) + 9^2$$
$$= 100 . 82 + 81 = 8281.$$

4) Durch wiederholte Anwendung der Lehrsätze des §. 67. erhält man noch:

$$a^{m+n+p+q} = a^m . a^n . a^p . a^q$$
$$a^{m-n+p-q} = \frac{a^m . a^p}{a^n . a^q}$$
$$(abcd)^m = a^m . b^m . c^m . d^m$$
$$\left(\frac{abc}{de}\right)^m = \frac{a^m . b^m . c^m}{d^m . e^m}$$
$$a^{mnp} = [(a^m)^n]^p = [(a^n)^p]^m \text{ etc.}$$

§. 69.

Eine algebraische Summe heißt nach *fallenden Potenzen* eines Buchstaben, z. B. von x *geordnet*, wenn sie die Form:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots mx^2 + nx + p;$$

dagegen nach *steigenden Potenzen* desselben Buchstaben geordnet, wenn sie die Form:

$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + mx^{n-2} + nx^{n-1} + px^n$$

hat, wobei a, b, c, ... m, n, p ganz beliebige Ausdrücke vorstellen, nur dürfen sie x nicht weiter in sich enthalten.

§. 70.

Jede Zahl läßt sich als eine Summe von Potenzen einer andern darstellen.

Es sei $a > x$.

Nun ist $\frac{a}{x} = q + \frac{a - qx}{x}$; q läßt sich so wählen, daß

$$a - qx = b < x \text{ wird.}$$

Aus $\frac{a}{x} = q + \frac{b}{x}$ folgt

$a = qx + b$; woraus die Richtigkeit obiger Behauptung folgt.

Ist noch $q > x$, dann ist auch

$$q = px + c, \text{ also}$$
$$a = (px + c)\,x + b$$
$$= px^2 + cx + b.$$

Soll z. B. die Zahl 52 in eine nach Potenzen von 3 fortlaufende Reihe verwandelt werden, so erhält man

$$52 = 1 . 3^3 + 2 . 3^2 + 2 . 3 + 1.$$

§. 71.

1) Das Produkt zweier geordneten algebraischen Summen wird jedesmal wieder als eine auf dieselbe Weise geordnete Summe verlangt, z. B.

$$\begin{array}{lllll} & ax^2 + bx + c & & & \\ & mx^2 + nx + p & & & \\ \hline amx^4 & + bmx^3 & + cmx^2 & & \\ & + anx^3 & + bnx^2 & + cnx & \\ & & + apx^2 & + bpx & + cp \\ \hline \multicolumn{5}{l}{amx^4 + (bm + an)\,x^3 + (cm + bn + ap)x^2 + (cn + bp)\,x + cp.} \end{array}$$

In der als Produkt erhaltenen Summe erkennt man deutlich, daß das erste Glied ein bloßes Produkt der beiden ersten Glieder und das letzte Glied ein bloßes Produkt der beiden letzten Glieder der multiplicirten Summen ist.

2) Um daher bei der Division zweier algebraischen Summen den zweckmäßigsten Quotienten zu finden, ordne man Dividendus und Divisor nach Potenzen desselben Buchstabens und denke sich den noch unbekannten Quotienten auf dieselbe Art geordnet, so muß das erste Glied des Dividendus ein Produkt sein aus dem ersten Gliede des Divisors und dem ersten Gliede des Quotienten, man wird daher das letztere erhalten, indem man jene beiden durch einander dividirt. Ordnet man alsdann den Divisionsrest wieder auf dieselbe Art, so findet man das zweite Glied des Quotienten und somit auch alle folgenden Glieder ganz auf dieselbe Weise, z. B.

Quotient: $7a^4 - 4a^2b^2 + b^4$.

$$\begin{array}{l|l} a^6 - 3a^4b^2 + 5a^2b^4 & 7a^{10} - 25a^8b^2 + 48a^6b^4 - 23a^4b^6 + 5a^2b^8 \\ & 7a^{10} - 21a^8b^2 + 35a^6b^4 \\ \hline & \quad - 4a^8b^2 + 13a^6b^4 - 23a^4b^6 + 5a^2b^8 \\ & \quad - 4a^8b^2 + 12a^6b^4 - 20a^4b^6 \\ \hline & \qquad + a^6b^4 - 3a^4b^6 + 5a^2b^8 \\ & \qquad + a^6b^4 - 3a^4b^6 + 5a^2b^8 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Uebungen zum vierten Abschnitt.

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^2 + 5^3 = 225.$
3. $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 = 288.$
4. $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30.$
5. $(2^1 + 3^2 + 4^3)^2 = 75^2 = 5625.$
6. $(1^1 + 2^2 - 2^4 + 3^3 - 4^2)^5 = 0.$
7. $(1^1 + 2^2 - 3^2)^5 = (-4)^5 = -1024.$
8. $3a^2 - [5b^2 - (2a^2 - (7a^2 - 3b^2)) - 7a^2] = 5a^2 - 2b^2.$
9. $5a^3 - \{7a^4 - [3a^3 - (4a^5 - (19a^4 - 8a^3) + 9a^5) - 11a^4] + 10a^3\}$
 $= a^4 - 28a^5.$
10. $a^4 - [a^3 - (a^4 - b^3) + a^2] + a^2 - b^2 - [a^5 - (a^2 - b^3) - (a^5 + b^2)]$
 $= 2a^4 - a^3 + a^2 - 2b^3.$
11. $3a^2 . 2a^3 . 5a^5 = 30a^{12}.$
12. $x^{p-q+2} x^{p+q-3} = x^{2p-1}.$
13. $5a^2x^4 . 2a^3x^4y^5 . 6x^2y^6 = 60a^5x^{10}y^{11}.$
14. $(a^3 - 3a^2b^5 + 4b^2)\, 5a^2b^3 = 5a^5b^3 - 15a^4b^8 + 20a^2b^5.$
15. $(2a^5b^4c^2 - 3a^2c + 7ab^3c^4)\, 5a^2bc^5 = 10a^7b^5c^7 - 15a^4bc^6 + 35a^3b^4c^9.$
16. $15x^{12} : 3x^5 = 5x^7.$
17. $33a^{p-q} : 11a^{2q-p} = 3a^{2p-3q}.$
18. $48a^7b^5c^4 : 8a^6b^3c = 6ab^2c^3.$
19. $a^6b^4x^5 : a^9b^7x^2 = \frac{x^3}{a^3b^3}.$
20. $(9a^7b^5c^3 - 4a^9b^8 + 6a^{11}b^{15}c^4) : 36a^4b^3c^2 = \frac{a^3b^2c}{4} - \frac{a^5b^5}{9c^2} +$
 $\frac{a^7b^{12}c^3}{6}.$
21. $\frac{2a^5x^7}{3b^8} \cdot \frac{5a^4b^5}{4c^4x^5} \cdot \frac{18ab^2c^3}{25a^4x} = \frac{3a^9}{5bc}.$
22. $\frac{a^2x^5z^4}{b^3y^2} : \frac{a^5x^7z}{b^8y^5} = \frac{b^5y^3z^3}{a^3x^2}.$
23. $\left(\frac{56a^4}{9b^4} - \frac{4b^3c^7}{15a^2} + \frac{8a^3c^{12}}{5b^4}\right) : \frac{8a^3c^5}{45b^6} = \frac{35ab^2}{c^5} - \frac{3b^5c^2}{2a^5} + 9b^2c^7.$
24. $\frac{5a^7}{7b^3x^5} : \left(\frac{15a^4b^2}{16x^5y^2} : \frac{21a^2x^3}{48b^3y^5}\right) = \frac{a^5x^3}{3b^6y^3}.$
25. $\frac{a^3b^7}{c^2x^5} : \left[\left(\frac{a^7x^3}{b^4c^2} : \frac{c^3x^5}{a^4b^3}\right) : \frac{a^5x^2}{b^5c^4}\right] = \frac{b^3}{a^3cx^2}.$
26. $\frac{a^{15}}{b^5y^{11}} : \left\{\frac{a^4y^{16}}{b^{13}} : \left[\left(\frac{b^7y^5}{a^4} : \frac{b^5}{a^3y^5}\right) : \left(\frac{a^5b^{11}}{y^7} : \frac{b^2y^5}{a^3}\right)\right]\right\} = \frac{a^2b}{y^4}.$
27. $(2abc)^3 = 8a^3b^3c^3.$
28. $\left(\frac{2ab}{3cx}\right)^5 = \frac{32a^5b^5}{243c^5x^5}.$
29. $(-5a^3b^5)^2 = 25a^6b^{10}.$

30. $[(-2a^2)^5]^2 = 1024a^{20}$.

31. $\left(\frac{2a^2b^3x^4}{3y^5}\right)^3 = \frac{8a^6b^9x^{12}}{27y^{15}}$.

32. $\left(\frac{a^2y^px^{n-3}}{2b^{z-1}z^4}\right)^5 = \frac{a^{10}y^{5p}x^{5n-15}}{32b^{5z-5}z^{20}}$.

33. $\frac{3(2a^2x^6)^2}{4(3a^3x^4)^3} = \frac{1}{9a^5x^2}$.

34. $\left(\frac{3a^2x^2}{4bc^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2a^2c^4}{b^3x}\right)^3 = \frac{9a^{10}c^6x}{2b^{11}}$.

35. $\frac{(3a^4b)^2}{(5cd)^2} \cdot \frac{(5c)^4}{(6a)^5} \cdot \frac{(4b)^5}{40a^3b^5c} = \frac{16b^3}{27d^3}$.

36. $\left[\left(\frac{a^6b^3}{c^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{ax^3}{b}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{a^3b}{c^2x^3}\right)^5 : \left(\frac{a^2x^3}{b^2c}\right)^6\right] = \frac{a^{16}x^{20}}{b^{12}c^2}$.

37. $\left[\left(\frac{a^4b^3}{c^2x^3}\right)^5 : \left(\frac{ax^3}{bc^4}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{ab^2}{c^2x^3}\right)^6 : \left(\frac{a^2x^3}{b^2c^3}\right)^5\right] = \frac{a^{20}c^3x^6}{b^9}$.

38. $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$.

39. $(3a^2 - 5b^2)^2 = 9a^4 - 30a^2b^2 + 25b^4$.

40. $(a^2b^x + a^{x+1}b^2)^2 = a^4b^{2x} + 2a^{x+3}b^{x+3} + a^{2x+2}b^6$.

41. $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{9}$.

42. $\left(\frac{a^3}{2} - 2b^5\right)^2 = \frac{a^6}{4} - 2a^3b^5 + 4b^{10}$.

43. $\left(\frac{2a^2b}{3c^2} + \frac{3c^2}{2a^2b}\right)^2 = \frac{4a^4b^2}{9c^4} + 2 + \frac{9c^4}{4a^4b^2}$.

44. $(a + 2b + 3c)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 + 6ac + 12bc + 9c^2$.

45. $(3a - b + 2c)^2 = 9a^2 - 6ab + b^2 + 12ac - 4bc + 4c^2$.

46. $(1 + 2a - 3a^2)^2 = 1 + 4a - 2a^2 - 12a^3 + 9a^4$.

47. $(3a^2 + 5bc)(3a^2 - 5bc) = 9a^4 - 25b^2c^2$.

48. $(a^n + b^n)(a^n - b^n) = a^{2n} - b^{2n}$.

49. $(3a^2b^3x^4 - 4ab^5x^3)(3a^2b^3x^4 + 4ab^5x^3) = 9a^4b^6x^8 - 16a^2b^{10}x^6$.

50. $(a^2 - 2b^2 + 3c^4)(a^2 + 2b^3 - 3c^4) = a^4 - 4b^6 + 12b^3c^4 - 9c^8$.

51. $(a^2 - 2ab + 3ac - c^2)(a^2 - 2ab - 3ac + c^2) = a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2 - 9a^2c^2 + 6ac^3 - c^4$.

52. $(a^{2n} + a^{2n-4}b + a^{2n-2}b^2 + a^{2n-3}b^3 \ldots. b^{2n})(a-b) = a^{2n+1} - b^{2n+1}$.

53. $(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 \ldots. b^{2n})(a+b) = a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

54. $(a^4 + 2a^3b + 8ab^3 + 16b^4)(a^2 - 2ab + 4b^2) = a^6 + 16a^3b^3 + 64b^6$

55. $(16a^4 + 16a^3b + 4ab^3 + b^4 + 12a^2b^2)(4a^2 - 4ab + b^2) = 64a^6 - 16a^3b^3 + b^6$.

56. $(a^6 + 3a^5bc + 6a^4b^2c^2 + 7a^3b^3c^3 + 6a^2b^4c^4 + 3ab^5c^5 + b^6c^6)(a^3 - 3a^2bc + 3ab^2c^2 - b^3c^3) = a^9 - 3a^6b^3c^3 + 3a^3b^6c^6 - b^9c^9$.

57. $(3a^2 - 5ab + 6b^2)(2a^2 - 4ab - 5b^2) = 6a^4 - 22a^3b + 17a^2b^2 + ab^3 - 30b^4$.

58. $(5a^2 - 9ab + 7b^2)(3a^3 - 8a^2b - 2ab^2) = 15a^5 - 67a^4b + 83a^3b^2 - 38a^2b^3 - 14ab^4$.

59. $\left(\frac{2a^2c^3}{5b^3} - \frac{2b^3}{7c^3} + \frac{a}{3}\right)\left(\frac{a^2c^2}{3b^2} - \frac{2ab}{9c}\right) = \frac{2a^4c^6}{15b^6} + \frac{a^3c^2}{45b^2} - \frac{32a^2b}{189c}$
$+ \frac{4ab^4}{63c^4}.$

60. $\left(\frac{3a^2c^3}{4b^2} + \frac{2}{3b} - \frac{4}{a^2c^3}\right)\left(\frac{abc^2}{3} + \frac{3b^2}{ac}\right) = \frac{a^3c^6}{4b} + \frac{89ac^2}{36} + \frac{2b}{3ac} -$
$\frac{12b^2}{a^3c^4}.$

61. $\left(\frac{a^4}{b^3} + \frac{2a^2c^3}{b} - \frac{7c^2}{2a^2b^3}\right)\left(\frac{1}{b^3} - \frac{2c^3}{a^2b} + \frac{7c^2}{2a^6b^3}\right) = \frac{a^4}{b^6} - \frac{4c^6}{b^2} + \frac{14c^5}{a^4b^4}$
$- \frac{49c^4}{4a^8b^6}.$

62. $\left(\frac{a^3}{b^2} - \frac{2a^2b}{cd^2} + \frac{4bc}{3a^2} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{b^3}{a} - \frac{cd}{ab} + \frac{2ab}{cd}\right) = a^2b - \frac{2ab^4}{cd^2} + \frac{4b^4c}{3a^3}$
$+ \frac{b^3c}{ad} - \frac{a^2cd}{b^3} + \frac{2a}{d} - \frac{4c^2d}{3a^3} - \frac{c^2}{ab} + \frac{2a^4}{bcd} - \frac{4a^3b^2}{c^2d^3} + \frac{8b^2}{3ad} + \frac{2ab}{d^2}.$

63. $(4a^3 + 4a^2 - 29a + 21) : (2a - 3) = 2a^2 + 5a - 7.$

64. $(45a^7 - a^6 - 53a^5 + 20a^4) : (4a - 5a^2) = 5a^3 - 7a^4 - 9a^5.$

65. $(6a^{12} + a^9b^3 - 31a^6b^6 - 14a^3b^9 + 8b^{12}) : (2a^6 - 3a^3b^3 - 4b^6)$
$= 3a^6 + 5a^3b^3 - 2b^6.$

66. $(20a^{19} - 208a^7 - 121a^{15} + 132a^{23} + 245a^{11}) : (9a^5 - 16a + 11a^9)$
$= 12a^{14} - 8a^{10} + 13a^6.$

67. $(12a^{10}c^5 - 27a^6b^2c^3 + 18a^4b^3c^2 - 3a^2b^4c) : (2a^4c^2 - 3a^2bc + b^2)$
$= 6a^6c^3 + 9a^4bc^2 - 3a^2b^2c.$

68. $(a^{14}b^2 + 16a^6b^6 + 64a^2b^8) : (a^6b^2 + 4a^4b^3 + 4a^2b^4)$
$= a^8 - 4a^6b + 12a^4b^2 - 16a^2b^3 + 16b^4.$

69. $(a^7 - 12a^5b^2 + 48a^3b^4 - 64ab^6) : (a^4 + 6a^3b + 12a^2b^2 + 8ab^3)$
$= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3.$

70. $(a^{12} - b^{12}) : (a^8 + a^7b + a^6b^2 + a^2b^6 + ab^7 + b^8)$
$= a^4 - a^3b + ab^3 - b^4.$

71. $(a^9 - 24a^6b^3c^3 + 192a^3b^6c^6 - 512b^9c^9) : (a^3 - 6a^2bc + 12ab^2c^2 -$
$8b^3c^3) = a^6 + 6a^5bc + 24a^4b^2c^2 + 56a^3b^3c^3 + 96a^2b^4c^4 +$
$96ab^5c^5 + 64b^6c^6.$

72. $\left(\frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{5}ab - 2b^2\right) : \left(\frac{6}{5}a - 3b\right) = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b.$

73. $\left(\frac{12}{5}a^2 - 6ab - \frac{17}{15}ac + \frac{15}{4}b^2 + \frac{17}{12}bc - 25c^2\right) : \left(\frac{4}{3}a - \frac{5}{3}b\right.$
$\left. + 4c\right) = \frac{9}{5}a - \frac{9}{4}b - \frac{25}{4}c.$

74. $\left(\frac{a^4}{bc} + \frac{a^2d}{b^2} - \frac{bc}{d^2} - \frac{c^2}{a^2d}\right) : \left(\frac{a^2}{b} - \frac{c}{d}\right) = \frac{a^2}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a^2} + \frac{d}{b}.$

75. $\left(\frac{2a^2}{21b^4} - \frac{23}{210} + \frac{b^2}{3a} - \frac{b^4}{10a^2} + \frac{b^6}{5a^3}\right) : \left(\frac{a}{3b} + \frac{b^3}{5a}\right) = \frac{2a}{7b^3} - \frac{b}{2a} + \frac{b^3}{a^2}.$

Fünfter Abschnitt.
Von den numerischen Zahlen.

Erstes Kapitel.
Eintheilung der numerischen Zahlen. Zahlensysteme. Die vier Species der gemeinen Rechenkunst.

§. 72.

Eine bestimmte, in Ziffern geschriebene Zahl, deren Werth also nicht mehr beliebig ist, die vielmehr nur eine einzige bestimmte Zahl der natürlichen Zahlenreihe bezeichnet, nennt man eine numerische Zahl. Die ersten derselben, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sind schon in der Einleitung zur Mathematik angegeben worden; wollte man nun aber ebenso für jede folgende ein neues besonderes Zeichen (eine neue Ziffer) erfinden, so würde bei der unendlichen Menge von Zahlen ein außerordentliches Gedächtniß dazu gehören, um eine nicht allzu unbedeutende Anzahl derselben zu behalten. Um daher die Zahlen besser übersehen und weniger Ziffern anwenden zu können, theilt man sie in gewisse Abtheilungen ein, und giebt dann an, wieviel Einheiten einer jeden dieser Abtheilungen dazu gehören, um eine bestimmte Zahl zu erhalten. Dadurch erhält man ein sogenanntes Zahlensystem, und diejenige Zahl, bei welcher die erste Abtheilung aufhört, und die zweite beginnt, nennt man die Eintheilungszahl desselben. Ist die Eintheilungszahl gleich 2, d. h. gleich der auf die 1 folgenden Zahl, so heißt das Zahlensystem ein zweitheiliges oder dyadisches; ist sie gleich 3, ein dreitheiliges oder triadisches; gleich 4, ein viertheiliges oder tetradisches; gleich Zehn (z), ein zehntheiliges oder dekadisches u. s. w. Das letztere System ist das allgemein gebräuchliche, in ihm werden alle Zahlen der ersten Klasse Einer genannt, die zweite Abtheilung macht man bei der Zahl Zehn mal Zehn ($z \cdot z$ oder z^2), welche man Hundert oder einen Hunderter nennt, die dritte Abtheilung bildet man bei der Zahl Zehn mal Zehn mal Zehn oder Zehn mal Hundert ($z \cdot z \cdot z = z^2 \cdot z = z^3$), und nennt sie Tausend oder einen Tausender, dann folgen nach demselben Gesetz die Namen für die Grenzzahlen in folgender Ordnung: Zehntausend, Hunderttausend, Million, Zehn-Million, Hundert-Million, Tausend-Million, Zehntausend-Million, Hunderttausend-Million, Billion u. s. w.,

und dies Gesetz bleibt ohne Ende fort dasselbe, nämlich: Zehn Einheiten einer niederen Ordnung sind allemal gleich einer Einheit der nächst höheren Ordnung.

Vermöge dieser Eintheilung ist man im Stande, eine jede endliche Zahl mit den neun ersten Ziffern der Zahlenreihe auszudrücken, z. B. die Zahl: Sechs Tausender, fünf Hunderter, vier Zehner und drei Einer kann man folgendermaßen schreiben: $6z^3 + 5z^2 + 4z + 3$.

Wenn eine auf diese Art geschriebene numerische Zahl eine nach fallenden Potenzen von z geordnete Summe ist, wobei aber keine Potenz von z fehlen darf, so läßt man sämmtliche Potenzen von z und die dazwischen stehenden + Zeichen fort, und schreibt daher obige Zahl kürzer so: 6543. Hierin deutet also eine jede Ziffer durch die Stelle, in welcher sie steht, die Ordnung an, zu welcher ihre Einheiten gehören.

Will man nun eine numerische Zahl, in welcher eine oder mehrere Ordnungen gänzlich fehlen, auf dieselbe abgekürzte Art schreiben, so muß man sich eines Zeichens bedienen, welches die Stelle der fehlenden Ordnung vertritt, dabei aber die Eigenschaft hat, den Werth der numerischen Zahlen nicht zu verändern. Dazu ist aber kein Zeichen zweckmäßiger, als die im §. 12. definirte Null, da ja $0 . z = 0$ und $a + 0 = a$ ist. So muß man z. B die Zahl: Drei Hunderter und 4 Einer erst so ordnen: $3 . z^2 + 0 . z + 4$ und erst dann kann man sie auf die abgekürzte Art 304 schreiben.

§. 73.

1) Da $z = 1 . z + 0$ ist, so kann man selbst die Zahl Zehn mit Hülfe der 9 ersten Ziffern und der Null schreiben, nämlich $z = 10$; ebenso ist

$$z^2 = 1 . z^2 + 0 . z + 0 = 100$$

$$z^3 = 1 . z^3 + 0 . z^2 + 0 . z + 0 = 1000 \text{ ꝛc.}$$

2) Für das Aussprechen, Numeriren, der numerischen Zahlen hat man folgende willkührliche Regeln eingeführt: Statt zwei Zehner sagt man Zwanzig, statt drei Zehner Dreißig und so fort Vierzig, Fünfzig, Sechzig, Siebenzig u. s. w.

Statt Zehn und Eins sagt man Elf, statt Zehn und zwei Zwölf; statt Zehn und drei Dreizehn, und so fort Vierzehn, Fünfzehn, Sechszehn, Siebenzehn u. s. w., überhaupt spricht

man (in der deutschen Sprache) die Einer allemal vor den Zehnern aus, z. B. 47 heißt: Sieben und Vierzig. Beim Aussprechen größerer Zahlen denkt man sich dieselben in Abtheilungen von drei Stellen eingetheilt, und spricht eine jede solche Abtheilung für sich aus, z. B. 27435 wird gelesen 27 Tausend 435; und auf ähnliche Weise verfährt man mit Zahlen, die über 6 Stellen enthalten, z. B. 34520543289 heißt: 34 Tausend, 520 Million, 543 Tausend, 289.

§. 74.

1) Eine numerische Zahl wird mit Zehn multiplicirt, wenn man ihr zur Rechten eine Null anhängt.

Beweis. Ist eine Zahl der Reihe nach mit den Ziffern abcd geschrieben, wobei a, b, c und d eine der 9 Ziffern oder auch Null ist, so hat sie keine andere Bedeutung als $az^3 + bz^2 + cz + d$, und wenn man diese Summe mit Zehn oder mit z multiplicirt, so erhält man $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz$, wozu man nach §. 72. noch die Null fügen muß, um sie auf abgekürzte Art, nämlich abcd0, schreiben zu können.

2) Eine numerische Zahl wird durch Zehn dividirt, wenn man die letzte Ziffer wegläßt, sie aber als Zähler eines Bruchs wieder hinzufügt, dessen Nenner Zehn ist.

Beweis. Soll die obige Zahl $abcd = az^3 + bz^2 + cz + d$ durch Zehn oder z dividirt werden, so erhält man:

$$az^2 + bz + c + \frac{d}{z} \text{ oder } abc + \frac{d}{10}.$$

§. 75.

1) Auf dieselbe Art läßt sich zeigen, daß eine numerische Zahl mit 100, 1000, ꝛc. . . . . 10^n multiplicirt wird, wenn man ihr zur Rechten 2, 3 ꝛc. . . . . n Nullen anhängt.

2) Auch findet sich ebenso, daß eine numerische Zahl durch 100, 1000, ꝛc. . . . 10^n dividirt wird, wenn man die 2, 3 . . . n letzten Ziffern wegläßt, sie aber als Zähler eines Bruches wieder anhängt, dessen Nenner resp. 100, 1000, ꝛc. . . . . 10^n ist.

§. 76.

1) Die Addition zweier einziffrigen Zahlen geschieht ganz einfach durch bloßes Zusammenzählen ihrer Einheiten, z. B. $4+3 = 5+2 = 6+1 = 7$; wobei es für spätere Rechnungen vortheilhaft ist, die Summe aller einziffrigen Zahlen dem Gedächtnisse

einzuprägen. Eine Tabelle, in welcher diese Summen angegeben sind, nennt man das Eins und Eins.

2) Das Subtrahiren zweier einziffrigen Zahlen geschieht durch allmäliges Wegnehmen der Einheiten der einen Zahl von denen der andern, wobei natürlich der Subtrahendus kleiner als der Minuendus sein muß, z. B. $6 - 4 = 5 - 3 = 4 - 2 = 3 - 1 = 2$. Hat man das Eins und Eins im Kopf, so hat dies Subtrahiren keine Schwierigkeit.

3) Das Produkt zweier einziffrigen Zahlen findet man nach dem Satze $a \,.\, b = a + a + a + \ldots$ (bmal), und ergiebt sich daher dasselbe durch mehrmalige Anwendung von Nr. 1. z. B. $2 \,.\, 3 = 2 + 2 + 2 = 6$. Dabei ist es wieder zweckmäßig, das Produkt sämmtlicher einziffrigen Zahlen dem Gedächtnisse einzuprägen, und eine Tabelle, in welcher diese Produkte enthalten sind, nennt man das Ein mal Eins.

4) Vermittelst der letzteren Tabelle kann man auch alle diejenigen Zahlen durch einander dividiren, deren Quotient eine einziffrige (ganze) Zahl ist.

§. 77.

Das praktische Geschäft der vier ersten Rechnungsarten mit mehrziffrigen Zahlen soll hier als bekannt vorausgesetzt werden, weil derjenige, welcher sich mit der Mathematik beschäftigt, gewöhnlich schon Unterricht im praktischen Rechnen erhalten hat; sollte dies aber wider Vermuthen nicht der Fall sein, so kann man sich darüber aus jedem Rechenbuche belehren.

Dies Geschäft findet aber für die Addition und Subtraktion darin seine Begründung, daß man die Summanden einer Summe beliebig vertauschen kann, und daß zehn Einheiten einer niederen Ordnung gleich einer Einheit der nächst höheren Ordnung sind. Bei der Multiplikation kommen aber folgende Sätze zur Anwendung: Summen werden multiplicirt, indem man jeden Summanden der einen mit jedem Summanden der anderen Summe multiplicirt; ein Produkt wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man nur einen Faktor multiplicirt und den anderen als solchen beibehält; und endlich, eine Zahl wird mit einem Produkt multiplicirt, indem man sie erst mit dem einen und das erhaltene Produkt mit dem anderen Faktor multiplicirt. Soll z. B. eine Zahl mit 47

oder 4 . 10 + 7 multiplicirt werden, so kann man entweder zuerst mit 7 und dann mit 4 . 10 oder umgekehrt erst mit 4 . 10 und dann mit 7 multipliciren. Bei der Multiplikation mit 4 . 10 multiplicirt man erst mit 4 und das erhaltene Produkt dadurch mit 10, daß man zur Rechten eine Null anhängt, welche man in der Praxis gewöhnlich fortzulassen pflegt, z. B.

346		346
47		47
2422	oder	1384 .
1384 .		2422
16262		16262

Anmerkung. In Stelle des Punktes hat man sich die weggelassene Null zu denken.

Die praktische Regel für das Dividiren numerischer Zahlen ergiebt sich aus dem allgemeinen Divisionsgesetz des §. 57.; man muß jedoch bemerken, daß für das willkürlich zu wählende x hier gewöhnlich die höchste Ziffer der höchsten Ordnung genommen wird, welche, wenn man sie mit dem Divisor multiplicirt und dies Produkt vom Dividendus subtrahirt entweder Null oder eine numerische Zahl, welche kleiner als der Divisor ist, zum Reste läßt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt jede folgende Ziffer des Quotienten sogleich in eine niedrigere Ordnung als die vorhergehende, und es erscheint der Quotient als eine nach fallenden Potenzen von 10 geordnete Summe. Das dabei gewöhnlich angewendete Verfahren zeigt folgendes Schema:

47	16262	346		356	27893	$78\frac{125}{356}$
	141				2492	
	216		oder		2973	
	188				2848	
	282				125	
	282					
	0					

§. 78.

Die Aufgabe, eine numerische Zahl aus einem Zahlensysteme in ein anderes zu übertragen, kann für denjenigen, welcher sich die wenigen Andeutungen dieses Kapitels zur völligen Klarheit gebracht hat, mit keinen Schwierigkeiten verbunden sein. Soll z. B. die

Zahl A = 357 aus dem 10 theiligen in das 6 theilige System übertragen werden, so verwandle man dieselbe nach §. 70. in eine nach Potenzen von 6 fortlaufende Reihe, wodurch man $1 . 6^3 + 3 . 6^2 + 5 . 6 + 3$ und folglich die Zahl 1353 erhält.

Soll dagegen die Zahl 1353 aus dem 6theiligen System in das 10theilige übertragen werden, so schreibe man sie wiederum als algebraische Summe, nämlich $z^3 + 3z^2 + 5z + 3$, berechne nun die einzelnen Produkte für $z = 6$ nach dem Ein mal Eins des 10 theiligen Systems und addire dann die erhaltenen Werthe nach dem Eins und Eins desselben Systems, so wird man die Zahl 357 wieder erhalten.

Soll endlich eine Zahl aus irgend einem System in ein anderes übertragen werden, so ist es am bequemsten, sie erst in das 10theilige und aus diesem in das neue System zu übertragen, weil man dann das bekannte Ein mal Eins und Eins und Eins des 10theiligen Systems bei der Rechnung benutzen kann. Es bedarf wohl kaum noch der Erwähnung, daß die Anzahl der Ziffern immer um Eins kleiner sein muß, als die Eintheilungszahl, so daß also z. B. für das 12 theilige oder dodekadische System außer den bekannten 9 Ziffern und der Null noch 2 Zeichen (Ziffern) für die beiden auf die 9 folgenden Zahlen angenommen werden müßten.

Zweites Kapitel.

Von den einfachen und zusammengesetzten Zahlen.

§. 79.

1) Ist der Quotient $\frac{a}{b}$ zweier ganzen Zahlen a und b wieder eine ganze Zahl, d. h. geht die Division mit b in a auf, so nennt man die Zahl a ein Vielfaches der Zahl b (siehe §. 44.) und die Zahl b einen Theiler der Zahl a.

z. B. 6 ist ein Vielfaches von 2 und 2 ein Theiler von 6, da $\frac{6}{2} = 3$ also gleich einer ganzen Zahl ist.

2) Aus Nr. 2. des §. 42. folgt, daß jede Zahl ein Vielfaches von 1, und daß 1 ein Theiler jeder Zahl sein muß; ebenso ergiebt sich aus §. 41., daß jede Zahl ein Vielfaches von sich selbst (nämlich das Einfache), und daß jede Zahl auch ein Theiler von sich selbst ist.

3) Es ist deutlich, daß auch mehrere gegebene Zahlen nicht

nur einen, sondern auch mehrere gemeinschaftliche Theiler haben können, und daß der größte von diesen nicht größer sein kann, als die kleinste der gegebenen Zahlen, während der kleinste allemal gleich 1 sein muß.

So ist z. B. von 6, 12, 18 und 24 der größte gemeinschaftliche Theiler die kleinste Zahl 6 selbst.

4) Ebenso können aber auch mehrere gegebene Zahlen nicht nur eins, sondern auch mehrere gemeinschaftliche Vielfache haben. Von diesen kann das kleinste nie kleiner, als die größte der gegebenen Zahlen sein, während das größte allemal unendlich groß gedacht werden muß.

So ist z. B. von den Zahlen 4, 3, 6 und 12 die Zahl 12 selbst das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

5) Zahlen, die außer 1 und sich selbst keinen anderen Theiler haben, z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11 u. s. w., nennt man absolute Primzahlen oder kurzweg Primzahlen, auch einfache Zahlen; alle anderen Zahlen z. B. 4, 8, 9, 10, 12 u. s. w. werden zusammengesetzte Zahlen genannt.

6) Jedes Vielfache von 2, z. B. 2, 4, 6, 8 u. s. w., heißt eine gerade Zahl, jede andere Zahl, z. B. 1, 3, 5, 7, 9 u. s. w. eine ungerade Zahl. Es muß daher 2n allemal eine gerade und $2n \pm 1$ eine ungerade Zahl sein, wobei n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann.

§. 80.

1) Jeder gemeinschaftliche Theiler mehrerer Zahlen ist auch ein Theiler ihrer Summe und ihrer Differenz.

Beweis. Sind $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen, so ist auch ihre Summe und ihre Differenz $\frac{a \pm b}{m}$ eine ganze Zahl.

2) Jeder Theiler einer Zahl ist auch ein Theiler ihres Vielfachen.

Beweis. Ist $\frac{a}{m}$ eine ganze Zahl, so ist auch $\frac{a}{m} . b$ oder, was dasselbe ist, $\frac{a . b}{m}$ eine ganze Zahl.

3) Jeder gemeinschaftliche Theiler des Divisors d und des Divisionsrestes r ist auch ein Theiler des Dividendus D.

Beweis. Ist 1) $\frac{D}{d} = Q + \frac{r}{d}$, d. h. geht die Division zweier ganzen

Zahlen D und d nicht auf, sondern ergiebt sie den Quotienten Q und außerdem den Divisionsrest r, so geht die Gleichung durch Multiplikation beider Seiten mit d über in

2) $D = Q \cdot d + r$.

Hat nun d einen Theiler m, so hat ihn auch nach Nr. 2. Q . d und, wenn außerdem r denselben Theiler m hat, so muß nach Nr. 1. m auch ein Theiler von D sein.

4) Jeder gemeinschaftliche Theiler des Divisors d und des Dividendus D ist auch ein Theiler des Divisionsrestes r.

Beweis. Subtrahirt man auf beiden Seiten der Gleichung Nr. 2. im vorigen Beweise Q . d, so erhält man:

3) $D - d \cdot Q = r$.

Hat nun d einen Theiler m, so hat ihn auch nach Nr. 2. Q . d, und, wenn außerdem D denselben Theiler m hat, so muß nach Nr. 1. m auch ein Theiler von r sein.

§. 81.

Den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen a und b zu finden.

Auflösung. Man dividire, wie es das nebenstehende Schema zeigt, mit der kleineren Zahl a in die größere b und mit dem Divisionsrest d in den vorigen Divisor a, mit dem neuen Divisionsrest f wieder in den vorigen Divisor d und setze dies Verfahren so lange fort, bis die Division aufgeht, dann ist der letzte Divisor, hier f, der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen a und b.

```
a | b | c
    ac
    d | a | e
        de
        f | d | g
            d
            0
```

Beweis. Diese Division muß endlich einmal aufgehen, da die Divisionsreste d, f u. s. w. immer kleiner werden (nach §. 77.), geht die Division daher nicht früher auf, so muß dies doch spätestens dann stattfinden, wenn ein Divisor gleich 1 wird.

Da nun f sowohl ein Theiler von d, als auch von sich selbst ist, so ist auch f ein Theiler von a nach Nr. 3. des §. 80., und da ferner f ein Theiler von a und von d ist, so muß f auch nach demselben Satze ein Theiler von b, also von a und b sein.

Gäbe es endlich eine größere Zahl als f, welche den Dividendus b und den Divisor a zugleich theilte, so würde dieselbe nach Nr. 4. des §. 80. auch den Divisionsrest d und dann aus demselben Grunde auch jeden folgenden Divisionsrest, also auch den letzten f theilen müssen, was nicht möglich ist, da nie eine kleinere Zahl durch eine größere getheilt werden kann.

§. 82.

1) Da a und b (§. 81.) Vielfache von f sind, so muß nach §. 80. Nr. 2. jeder Theiler von f auch ein Theiler von a und b sein, woraus folgt, daß sämmtliche Theiler des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen auch Theiler dieser Zahlen sein müssen.

2) Ferner ergiebt sich aus dem letzten Theile des Beweises im §. 81., daß sämmtliche Theiler zweier Zahlen auch in dem größten gemeinschaftlichen Theiler derselben aufgehen müssen.

3) Wenn man zwei Zahlen a und b mit m multiplicirt, so ist der größte gemeinschaftliche Theiler für am und bm ebenfalls m mal größer, als der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b.

4) Durch Benutzung der beiden ersten Sätze dieses Paragraphen kann man auf eine leichte Art den größten gemeinschaftlichen Theiler für mehr als zwei Zahlen, z. B. für a, b, c und d finden.

Man suche ihn nämlich erst für zwei Zahlen, z. B. für a und b, dieser sei m, dann für m und die dritte Zahl c, welcher n sein mag, und endlich für n und die vierte Zahl d. Ist dieser gleich p, so muß p der größte gemeinschaftliche Theiler für a, b, c und d sein.

Beweis. p ist ein Theiler von d, und da p auch in n aufgeht, n aber der größte gemeinschaftliche Theiler von m und c ist, so geht nach Nr. 1. dieses Paragraphen p auch in m und c auf. m ist nun wieder der größte gemeinschaftliche Theiler für a und b, folglich muß p auch ein Theiler von a und b sein. — Daß p aber der größte gemeinschaftliche Theiler der gegebenen Zahlen ist, läßt sich leicht indirekt zeigen. Wäre nämlich $x > p$ und ein Theiler von a, b, c und d, so müßte nach Nr. 2. dieses Paragraphen, x auch ein Theiler von m und aus demselben Grunde dann auch ein Theiler von n und p sein, was nicht möglich ist.

§. 83.

Zahlen, deren größter gemeinschaftlicher Theiler gleich Eins ist, nennt man relative Primzahlen oder Primzahlen zu einander z. B. 3 und 7; 5, 11 und 17 u. s. w. Dabei ist es aber nicht nöthig, daß jede Zahl für sich eine (absolute) Primzahl sei, z. B. 4, 9, 25 oder 3, 7, 9, 8 u. s. w.

§. 84.

Geht eine ganze Zahl a in dem Produkt b.c zweier anderen ganzen Zahlen b und c auf, und ist a mit der

einen, z. B. mit b, relative Primzahl, so muß a ein Theiler der anderen Zahl c sein.

Beweis. Da a und b relative Primzahlen sind, so ist ihr größter gemeinschaftlicher Theiler gleich 1, folglich nach Nr. 3. des §. 82. der größte gemeinschaftliche Theiler für ac und bc gleich c. Da nun a in ac und bc aufgeht, so geht nach Nr. 2. des §. 82. a auch in deren größten gemeinschaftlichen Theiler c auf.

§. 85.

Wenn zwei relative Primzahlen a und b einzeln in c aufgehen, so geht auch ihr Produkt ab in c auf.

Beweis. Es ist $a \cdot \frac{c}{a} = b \cdot \frac{c}{b}$.

Dividirt man beide Seiten dieser Gleichung durch b, so ist

$$\frac{a \cdot \frac{c}{a}}{b} = \frac{c}{b}, \text{ also eine ganze Zahl.}$$

Da nun b mit a relative Primzahl ist, und in dem Produkt zweier ganzen Zahlen, nämlich in $a \cdot \frac{c}{a}$ aufgeht, so muß, nach §. 84., b in $\frac{c}{a}$ aufgehen, d. h. $\frac{\frac{c}{a}}{b}$ oder $\frac{c}{ab}$ eine ganze Zahl sein.

§. 86.

1) Eine Zahl hat 2 zum Theiler, wenn die letzte Ziffer den Theiler 2 hat, also eine gerade Zahl ist.

2) Eine Zahl hat 4 zum Theiler, wenn die letzte plus der doppelten vorletzten Ziffer den Theiler 4 hat.

3) Eine Zahl hat 8 zum Theiler, wenn die letzte plus der doppelten vorletzten plus der 4fachen drittletzten Ziffer den Theiler 8 hat.

4) Eine Zahl hat 5 zum Theiler, wenn die letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist.

5) Eine Zahl hat 10 zum Theiler, wenn die letzte Ziffer eine 0 ist.

6) Eine Zahl hat 3 oder 9 zum Theiler, wenn die Summe ihrer Ziffern (Quersumme oder Ziffersumme) den Theiler 3 oder resp. 9 hat.

7) Bezeichnet man bei einer Zahl die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Ziffer mit P und die Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Ziffer mit Q, so ist diese Zahl durch 11 theilbar, wenn P — Q den Theiler 11 hat.

Beweise. Eine jede Zahl z, die der Reihe nach mit den Ziffern .... f, e, d, c, b, a geschrieben ist, kann man sich in folgende Summe zerlegt denken:

$$z = a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d + 10000\,e + 100000\,f \ldots$$

wobei a die letzte, b die vorletzte, c die drittletzte u. s. w. Ziffer dieser Zahl ist.

1) Ist a durch 2 theilbar, so muß auch z durch 2 theilbar sein, da alle folgenden Summanden Produkte von 10 sind, 10 selbst aber 2 zum Theiler hat.

2) Man kann die Zahl z aber auch zerlegt denken in:

$$(a + 2b) + 8b + 100\,c + 1000\,d + 10000\,c + \ldots\ldots,$$

wenn daher $a + 2b$ durch 4 theilbar ist, so muß auch z durch 4 theilbar sein, denn 8b hat den Theiler 4 und ebenso alle folgenden Summanden, da sie Produkte von 100 sind.

3) Die Zahl z kann man auch zerlegen in:

$$(a + 2b + 4c) + 8b + 96c + 1000d + 10000e + \ldots\ldots,$$

wenn nun $a + 2b + 4c$ durch 8 theilbar ist, so muß auch z den Theiler 8 haben, denn 8b und 96c haben den Theiler 8 und alle anderen Summanden ebenfalls, da sie Produkte von 1000 sind.

4) Ist $a = 0$ oder $= 5$, so ist leicht ersichtlich, daß alle Summanden, mithin auch z den Theiler 5 haben.

5) Daß eine Zahl durch 10 theilbar ist, wenn die letzte Ziffer eine 0 ist, ergiebt sich schon aus §. 74. Nr. 2.

6) Zerlegt man z folgendermaßen:

$$z = (a + b + c + d \ldots) + 9b + 99c + 999d + \ldots\ldots,$$

so ist klar, daß z durch 3 oder durch 9 theilbar ist, sobald $a + b + c + d + \ldots\ldots$ den Theiler 3 oder 9 hat, denn alle anderen Summanden lassen sich sowohl durch 3 als durch 9 ohne Rest theilen.

7) Die Zahl z läßt sich auf folgende Art zerlegen:

$$(a + 10b + c + 10d + e + 10f + \ldots) + (99c + 990d + 9999e + 99990f + \ldots\ldots).$$

Da nun der in Klammern eingeschlossene zweite Summand allemal durch 11 theilbar ist, wovon man sich bald überzeugt, so wird z durch 11 theilbar sein, wenn der in der ersten Klammer stehende Summand $a + 10b + c + 10d + e + 10f + \ldots\ldots$ den Theiler 11 hat. Dieser Summand läßt sich aber zerlegen in:

$$a + 11b - b + c + 11d - d + e + 11f - f + \ldots\ldots$$
$$= 11 \,.\, (b + d + f + \ldots\ldots) + (a + c + e + \ldots\ldots) - (b + d + f + \ldots\ldots).$$

Dieser Ausdruck ist aber durch 11 theilbar, sobald:

$$(a + c + e + \ldots\ldots) - (b + d + f \ldots\ldots) \text{ d. h. } P - Q$$

durch 11 theilbar ist.

§. 87.

Aus §. 85. ergiebt sich unmittelbar, daß eine Zahl durch 6 theilbar ist, wenn sie die Theiler 2 und 3; durch 15 wenn sie die Theiler 3

und 5; durch 18, wenn sie die Theiler 2 und 9 hat u. s. w. Es ist aber eine Zahl, z. B. 24, nicht durch 18 theilbar, wenn sie die Theiler 3 und 6 hat, da 3 und 6 nicht relative Primzahlen sind.

Anmerkung. Die Kennzeichen für die Theilbarkeit einer Zahl durch 7, 13 u. s. w. sind nicht einfach genug, um Vortheile für das praktische Rechnen zu gewähren.

§. 88.

Das Produkt zweier (absoluten) Primzahlen kann nie gleich dem Produkt zweier anderen (absoluten) Primzahlen sein.

Beweis. Sind a, b, c und d absolute Primzahlen und wäre $ab = cd$, so müßte auch
$\frac{ab}{c} = d$, also eine ganze Zahl sein.
Da nun c und b absolute Primzahlen sind, so sind sie auch Primzahlen zu einander, und nach §. 84. müßte c ein Theiler von a sein, was nicht möglich sein kann, da a eine Primzahl ist.

Anmerkung. Derselbe Satz läßt sich nun leicht auf Produkte von mehr als 2 Primzahlen ausdehnen.

§. 89.

Wenn man in eine gegebene Zahl z mit allen (absoluten) Primzahlen von 2 an, bis zu derjenigen hin, deren Quadrat nicht kleiner als die gegebene Zahl ist, dividirt, alle diese Divisionen aber nicht aufgehen, so muß z selbst eine (absolute) Primzahl sein.

Beweis. Es sei $p^2 > z$, und es gehe keine Primzahl, welche zwischen 1 und p liegt, in z auf, so kann auch keine größere Zahl als p in z aufgehen; denn wäre z. B. $m > p$ und $\frac{z}{m} = n$, so müßte $n < p$ und auch $\frac{z}{n} = m$ sein, was gegen die Voraussetzung streitet. Geht aber keine Primzahl in z auf, so kann z auch durch keine zusammengesetzte Zahl theilbar sein, weshalb z eine (absolute) Primzahl sein muß.

§. 90.

1) Aus §. 89. ergiebt sich das Verfahren, welches man anzuwenden hat, um zu untersuchen, ob eine gegebene Zahl eine (absolute) Primzahl ist, oder nicht.

Die Primzahlen unter 200 sind folgende:
1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

2) Soll eine zusammengesetzte Zahl, z. B. 360, in ihre Primfaktoren zerlegt werden, so kann dies nur versuchsweise da-

durch geschehen, daß man dieselbe durch die kleinste, auf die 1 folgende Primzahl zu dividiren sucht, welche keinen Rest mehr läßt, wodurch man zwei Faktoren der Zahl erhält, von denen der eine diese Primzahl ist, nämlich 2 . 180. Verfährt man nun mit dem zweiten Faktor aufs Neue ebenso, so erhält man statt seiner das Produkt 2 . 90, und statt 90 wieder 2 . 45, dann ist 45 = 3 . 15 und 15 endlich = 3 . 5.

Es ist also $360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2^3 . 3^2 . 5$.

3) Daß sich eine zusammengesetzte Zahl aber in keine anderen als die gefundenen Primfaktoren zerlegen läßt, folgt aus §. 88.

§. 91.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden.

Auflösung. Man zerlege jede Zahl nach §. 90. Nr. 2. in ihre Primfaktoren, so ist das Produkt aus den höchsten vorkommenden Potenzen aller dieser Primfaktoren das verlangte kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Z. B.

$8 = 2^3$; $10 = 2 . 5$; $9 = 3^2$; $18 = 2 . 3^2$; $15 = 3 . 5$, mithin ist $2^3 . 3^2 . 5$ oder 360 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 8, 10, 9, 18 und 15.

Die Richtigkeit ergiebt sich sogleich daraus, daß nur die sämmtlichen Primfaktoren von 8, 10, 9, 18 und 15 in 360 enthalten sind.

§. 92.

Auch den größten gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen kann man auf ähnlichem Wege finden, indem man nämlich jede Zahl in ihre Primfaktoren zerlegt und dann untersucht, welche und wie viele derselben in jeder Zahl enthalten sind.

§. 93.

1) In Nr. 7. des §. 45. wurde erklärt, was man unter dem Heben eines Bruches zu verstehen habe, es ist nun deutlich, daß dies am besten dadurch geschieht, wenn man Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt.

2) Bei der Addition und Subtraktion der Brüche, welche ungleiche Nenner haben, kommt es nach Nr. 9. des §. 45. darauf an, ihnen einen gemeinschaftlichen Nenner zu geben; daß man aber hierzu am zweckmäßigsten das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sämmtlicher Nenner nimmt, welches man in diesem Falle gewöhnlich General-Nenner nennt, bedarf keiner Erläuterung.

§. 94.

Für das Zerlegen algebraischer Summen in Faktoren ist zu merken:

1) Haben sämmtliche Glieder einen oder mehrere gemeinschaftliche Faktoren, so kann man diese nach §. 28. heraustrennen, z. B.

$$25a^2b - 30ab^2 + 15a^2b^2 = 5ab\,(5a - 6b + 3ab).$$

2) Häufig kann man aus Partien von Gliedern die gemeinschaftlichen Faktoren heraustrennen, dadurch eine neue algebraische Summe erhalten, in welcher vielleicht jedes Glied wieder einen gemeinschaftlichen Faktor hat, der dann nach Nr. 1. behandelt werden kann, z. B.

$$6ac - 10bc - 9ad + 15bd = 2c\,(3a - 5b) - 3d\,(3a - 5b)$$
$$= (3a - 5b)\,(2c - 3d).$$

3) Nach Nr. 2. des §. 68. ist die Differenz zweier Quadrate gleich dem Produkt aus der Summe und Differenz ihrer Basen. Z. B.

$$4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)\,(2a - 3b) \text{ oder}$$
$$25a^4 - 1 = (5a^2 + 1)\,(5a^2 - 1) \text{ u. s. w.}$$

4) Multiplicirt man $x + a$ mit $x + b$, so erhält man

$$x^2 + (a + b)\,x + ab.$$

Hat man also umgekehrt z. B. $x^2 + 3x - 4$ in Faktoren zu zerlegen, so muß man zwei Zahlen a und b suchen, deren Produkt $ab = -4$, und deren Summe $a + b = +3$ ist. Es gehört nicht viel Uebung dazu, um bald $+4$ und -1 als solche Zahlen zu erkennen, und dann ist also $x^2 + 3x - 4 = (x + 4) \cdot (x - 1)$.

Eine andere, sichere Methode, die Zerlegung des Ausdrucks $x^2 + ax + b$ in Faktoren zu bewirken, besteht darin, daß man zunächst das Quadrat des halben Coëfficienten von x addirt und subtrahirt, dadurch erhält man

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b.$$

Die drei ersten Glieder bilden nun das Quadrat von $x + \frac{a}{2}$, so daß der Ausdruck auch wie folgt geschrieben werden kann

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b\right].$$

Ist nun $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ ein Quadrat, etwa gleich c^2, dann hat man:

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - c^2$$
$$= \left(x + \frac{a}{2} + c\right)\left(x + \frac{a}{2} - c\right). \text{ Z. B.}$$
$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$
$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= (x + 3)\,(x + 2).$$

5) Multiplicirt man $ax + b$ mit $cx + d$, so erhält man

$$acx + (bc + ad)\,x + bd.$$

Hat man umgekehrt einen Ausdruck dieser Form, z. B. $6x^2 + x - 15$ in Faktoren zu zerlegen, so suche man zunächst die beiden Zahlen bc und ad, deren Produkt $abcd = 6 \cdot (-15) = -90$, und deren Summe $= +1$ ist. Da das Produkt das Vorzeichen minus hat, so müssen die beiden

zu suchenden Zahlen nach §. 50. ungleiche Vorzeichen haben; da aber ferner ihre Summe das Vorzeichen plus hat, so muß nach §. 16. die größere von ihnen das Vorzeichen plus haben. Es ist nicht schwer hiernach $+ 10$ und $- 9$ als die gesuchten Zahlen zu erkennen, es ist dann statt $6x^2 + x - 15$ der Ausdruck $6x^2 + 10x - 9x - 15$ zu setzen. Dieser ist nach Nr. 2. =

$$2x(3x + 5) - 3(3x + 5) = (2x - 3)(3x + 5).$$

Auch die zweite unter Nr. 4. angeführte Methode läßt sich mit Vortheil bei der Zerlegung eines Ausdrucks dieser Art anwenden, z. B.

$$\begin{aligned} 2n^2 + 3n + 1 &= 2\left(n^2 + \tfrac{3}{2}n + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2\left[n^2 + \tfrac{3}{2}n + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(n^2 + \tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right] \\ &= 2\left(n + \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\right)\left(n + \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\right) \\ &= 2(n+1)\left(n + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= (n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

6) Durch aufmerksame Betrachtung und Anwendung nachstehender Formeln, von deren Richtigkeit man sich leicht durch Multiplikation der Faktoren überzeugen kann, ist ebenfalls häufig die Zerlegung einer algebraischen Summe in Faktoren zu erreichen:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Z. B. $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 = (n + 1)(n + 1)$

$$8a^3 - x^3 = (2a - x)(4a^2 + 2ax + x^2)$$
$$8x^3 + 1 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) \text{ u. s. w.}$$

7) Die Zerlegung algebraischer Summen in Faktoren ist aber sowohl für das Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Theilers, als auch des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen algebraischer Summen von der größten Wichtigkeit. Hierdurch wird ferner das Heben und das Vereinigen von solchen Brüchen sehr vereinfacht, deren Zähler und Nenner aus algebraischen Summen bestehen. Z. B.:

$$\frac{14a^2 - 7ab}{10ax - 5bx} = \frac{7a(2a - b)}{5x(2a - b)} = \frac{7a}{5x}$$

$$\frac{5a^2 + 5ax}{a^2 - x^2} = \frac{5a(a + x)}{(a + x)(a - x)} = \frac{5a}{a - x}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2 - x^2} - \frac{a - x}{a + x} &= \frac{a^2 - (a - x)(a - x)}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{a^2 - (a^2 - 2ax + x^2)}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{a^2 - a^2 + 2ax - x^2}{a^2 - x^2} = \frac{2ax - x^2}{a^2 - x}. \end{aligned}$$

Drittes Kapitel.

Von den zehntheiligen oder Decimal-Brüchen.

§. 95.

Jeder Bruch, dessen Zähler eine numerische ganze Zahl und dessen Nenner eine Potenz von Zehn ist, heißt ein **zehntheiliger** oder Decimalbruch. Z. B. $\frac{234}{10}$, $\frac{234}{100}$ ꝛc.

Der Bequemlichkeit halber läßt man beim Schreiben den Nenner allemal fort und deutet denselben dadurch an, daß man im Zähler von rechts nach links so viel Stellen durch ein **Komma** (Decimalstrich) abschneidet, wie der Exponent des Nenners Einheiten hat. Obige Brüche werden daher geschrieben 23,4 und 2,34. Dabei heißen diejenigen Ziffern, welche links vom Komma stehen, die **Ganzen** und die übrigen die **Decimalstellen**. Sollten im Zähler nicht genug Ziffern vorhanden sein, so ergänzt man die fehlenden durch Nullen. Z. B. $\frac{43}{100} = 0{,}43$; $\frac{2}{1000} = 0{,}002$ ꝛc.

Da $\frac{86732}{10^4} = \frac{8 \,.\, 10^4 + 6 \,.\, 10^3 + 7 \,.\, 10^2 + 3 \,.\, 10 + 2}{10^4}$, so ist auch $8{,}6732 = 8 + \frac{6}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{2}{10^4}$, wodurch sich ergiebt, daß die Decimalbrüche eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems auf gebrochene Zahlen sind.

Dabei steht die erste Ziffer rechts vom Komma in der Stelle der Zehntel, die zweite in der Stelle der Hundertel ꝛc.

§. 96.

Man kann an jeden Decimalbruch, unbeschadet seines Werthes, zur Rechten n Nullen anhängen, denn dadurch wird Zähler und Nenner mit 10^n multiplicirt. Befinden sich ferner zur Rechten eines Decimalbruchs n Nullen, so kann man diese ohne Weiteres fortlassen, weil dadurch Zähler und Nenner durch 10^n dividirt werden. Z. B. $0{,}34 = 0{,}3400$ und $2{,}3000 = 2{,}3$.

§. 97.

Rückt man in einem Decimalbruch das Komma n Stellen rechts, so wird derselbe dadurch mit 10^n multiplicirt, denn durch das Rücken des Komma's bleibt der Zähler unverändert, der Nenner erhält aber n Nullen weniger und ist mithin durch 10^n dividirt, folglich der Bruch selbst mit 10^n multiplicirt worden.

Rückt man dagegen das Komma n Stellen links, so bleibt der Zähler ebenfalls unverändert, der Nenner erhält aber n Nullen mehr, ist also mit 10^n multiplicirt, weshalb der Bruch selbst durch 10^n dividirt worden ist. Z. B.

$3,245 \,.\, 100 = 324,5$ und $2,3 : 1000 = 0,0023$.

§. 98.

Eine Einheit irgend einer Decimalstelle ist immer größer, als alle rechts folgenden Decimalstellen zusammengenommen.

Beweis. Es ist $1 > 0$, abcd...., oder

$$1 > \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4} \ldots,$$ also auch,

wenn man auf beiden Seiten dieser Ungleichung durch 10^n dividirt:

$$\frac{1}{10^n} > \frac{a}{10^{n+1}} + \frac{b}{10^{n+2}} + \frac{c}{10^{n+3}} + \frac{d}{10^{n+4}} \ldots$$

§. 99.

Einen Decimalbruch abkürzen heißt eine oder mehrere der letzten Decimalstellen fortlassen.

Steht in der höchsten fortgelassenen Stelle eine 5 oder eine Zahl, die größer als 5 ist, so vermehre man die zuletzt stehenbleibende Ziffer um 1, beträgt sie aber weniger als 5, so vermehre man nicht; in beiden Fällen beträgt der Fehler noch nicht eine halbe Einheit der zuletzt stehengebliebenen Decimalstelle.

Z. B. Schreibt man statt 0,245349 nur 0,245, so läßt man noch kein halbes Tausendtel fort, denn 10 Zehntausendtel sind gleich einem Tausendtel, also 5 Zehntausendtel erst gleich einem halben Tausendtel. Schreibt man aber statt 0,245649 nur 0,245, so läßt man mehr als ein halbes Tausendtel fort, fügt man aber ein ganzes Tausendtel hinzu, schreibt also 0,246, so ist der Bruch noch um kein halbes Tausendtel zu groß.

§. 100.

Jeder Bruch kann entweder genau oder angenähert in einen Decimalbruch verwandelt werden.

1) Wenn in dem Bruch $\frac{a}{b}$ die Primfaktoren des Nenners b nur 2 oder 5 sind, also $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^p\,5^q}$, so kann man dadurch, daß Zähler und Nenner mit $2^q\,5^p$ multiplicirt werden, den Nenner zu einer Potenz von 10 machen. Man erhält dann

$$\frac{a}{b} = \frac{a \,.\, 2^q \,.\, 5^p}{2^{p+q} \,.\, 5^{p+q}} = \frac{a \,.\, 2^q \,.\, 5^p}{10^{p+q}}.$$

Z. B. $\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}=\frac{3\,.\,5^2}{2^2\,.\,5^2}=\frac{75}{10^2}=0{,}75$; oder
$\frac{7}{40}=\frac{7}{2^3\,.\,5}=\frac{7\,.\,5^2}{2^3\,.\,5^3}=\frac{175}{10^3}=0{,}175.$

2) Enthält der Nenner b des Bruches $\frac{a}{b}$ noch andere Primfaktoren als 2 und 5, dann giebt es keine Zahl, welche mit b multiplicirt, zum Produkt eine Potenz von 10 hat.

Es ist aber $\frac{a}{b}=\frac{a\,.\,10^n}{b}:10^n$ und da

$$\frac{a\,.\,10^n}{b}=q+\frac{r}{b} \text{ ist, so ist auch}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{q}{10^n}+\frac{r:b}{10^n}.$$

Je größer man nun n wählt, um so größer wird auch q, um so kleiner aber der Bruch $\frac{r:b}{10^n}$, also ist angenähert

$$\frac{a}{b}=\frac{q}{10^n}.$$

Z. B. $\frac{3}{7}=\frac{30}{7}:10=\frac{4}{10}+\frac{2:7}{10}=0{,}4+\frac{2:7}{10}$
$=\frac{300}{7}:100=0{,}42+\frac{6:7}{100}$
$=\frac{3000}{7}:1000=0{,}428+\frac{4:7}{1000}$
$=\frac{30000}{7}:10000=0{,}4285+\frac{5:7}{10000}$
$=\frac{300000}{7}:100000=0{,}42857+\frac{1:7}{100000}$
$=\frac{3000000}{7}:1000000=0{,}428571+\frac{3:7}{1000000}$,

also angenähert $\frac{3}{7}=0{,}428571$, bei welcher Annäherung der Fehler noch kein Milliontel beträgt.

§. 101.

Verwandelt man den Bruch $\frac{a}{b}$, dessen Nenner entweder gar nicht oder doch nur theilweise die Zahlen 2 und 5 zu Primfaktoren hat, in einen Decimalbruch, so findet man jede Ziffer des Quotienten dadurch, daß man an den vorangegangenen Rest eine Null anhängt und in diesen dann mit dem Nenner b dividirt. Da nun der Rest jedesmal kleiner als der Divisor b ist, so können sich nur b—1 verschiedene Reste ergeben, und es muß daher

spätestens dann, wenn alle b—1 verschiedenen Reste vorgekommen sind, einer der früheren und mit ihm alle folgenden wiederkehren. Es wird daher auch im Quotienten, von irgend einer Decimalstelle an, eine Anzahl Decimalstellen beständig wiederkehren, und diese Anzahl ist höchstens gleich den Einheiten des Nenners (Divisors) weniger 1.

Z. B. $\frac{13}{37} = 0{,}351351\ldots$, denn

```
37 | 130 | 0,351351 ...
     111
      190
      185
        50
        37
        130
        111
        ...
```

$\frac{2}{55} = 0{,}03636\ldots$, denn

```
55 | 200 | 0,03636 ...
     165
      350
      330
       200
       165
       ...
```

§. 102.

Ein Decimalbruch, in welchem sich eine Anzahl von Decimalstellen ohne Ende fort wiederholt, heißt ein **periodischer Decimalbruch** und die sich wiederholenden Decimalstellen die **Periode** desselben. Beginnt die Periode gleich nach dem Komma, z. B. 0,2323 . . . ., so sagt man, der Decimalbruch sei **vollständig** periodisch; befinden sich aber zwischen dem Komma und der Periode noch andere Decimalstellen, so nennt man ihn **unvollständig periodisch**, z. B. 0,52323 . . . Häufig pflegt man die Periode dadurch anzudeuten, daß man über die Periode einen Strich setzt, z. B. $0{,}\overline{23}$; $0{,}5\overline{23}$.

§. 103.

Da ein periodischer Decimalbruch durch Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch entstanden ist, so kann man auch umgekehrt jeden periodischen Decimalbruch wieder in denjenigen gewöhnlichen Bruch zurückverwandeln, aus welchem er entstanden gedacht werden kann.

1) Soll z. B. der vollständig periodische Decimalbruch $0,\overline{23}$ in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so bezeichne man ihn vorläufig mit x und multiplicire ihn dann mit 10^n, wobei n gleich der Anzahl der Ziffern in der Periode, hier also gleich 2 ist. Dadurch erhält man:

$$100x = 23,\overline{23}.$$

Hiervon $x = 0,\overline{23}$ subtrahirt, giebt

$$99x = 23, \quad \text{mithin ist}$$

$$x = \frac{23}{99}.$$

Praktische Regel: Man nehme die Periode zum Zähler und zum Nenner so viel Neunen, wie die Periode Ziffern hat.

2) Soll dagegen der unvollständig periodische Decimalbruch $0,5\overline{23}$ in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so erhält man durch Anwendung desselben Verfahrens:

$$100x = 52,3\overline{23} \text{ und}$$

hiervon $x = 0,5\overline{23}$ subtrahirt,

$$99x = 51,8 \quad \text{also}$$

$$x = \frac{51,8}{99} \text{ oder } \frac{518}{990}.$$

Praktische Regel: Der Zähler entsteht, wenn man am Schluß der ersten Periode diejenigen Decimalstellen, die nicht zur Periode gehören, subtrahirt ($523 - 5 = 518$); der Nenner besteht aus so viel Neunen, wie die Periode Ziffern hat, und so viel angehängten Nullen, wie Decimalstellen vor der Periode stehen.

§. 104.

Decimalbrüche werden auf gleiche Nenner gebracht, wenn man ihnen gleich viel Decimalstellen giebt; dies kann aber nach §. 96. dadurch geschehen, daß man zur Rechten desjenigen Decimalbruches, welchem Decimalstellen fehlen, die gehörige Anzahl von Nullen anhängt.

§. 105.

Da Decimalbrüche durchaus nichts anderes, als eine besondere Art der gewöhnlichen Brüche sind, so darf mit ihnen auch nach keinen anderen Gesetzen gerechnet werden, als nach denjenigen, welche im §. 45. entwickelt worden sind.

1) Decimalbrüche werden daher addirt oder subtrahirt, wenn man sie zuerst auf gleichen Nenner bringt (d. h. sie mit

dem Komma untereinander setzt und sich die rechts fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt denkt), dann die Zähler (d. h. die ganzen Zahlen, welche nach dem Weglassen des Komma entstehen) addirt oder subtrahirt, und den gemeinschaftlichen Nenner beibehält (d. h. zuletzt eben so viel Decimalstellen von rechts nach links abschneidet, wie jeder der auf gleichen Nenner gebrachten Decimalbrüche hatte).

z. B. 23,04
2,345
0,0003
3,4
28,7853

36,025
0,4609
35,5641

Sind die Summanden abgekürzte Decimalbrüche, dann wird man dieselben alle auf gleich viel Decimalstellen abkürzen. Da die Fehler der einzelnen Summanden im ungünstigsten Falle $\pm\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Stelle betragen, so wird im Allgemeinen der Fehler an der Summe bei n Summanden kleiner als $\pm\frac{n}{2}$ Einheiten der letzten Decimale sein.

Bei der Subtraktion zweier auf gleich viel Stellen abgekürzter Decimalbrüche kann der durch die Abkürzung entstandene Fehler höchstens eine Einheit der letzten Stelle betragen.

2) Zwei Decimalbrüche werden multiplicirt, indem man sie wie ganze Zahlen multiplicirt, und dem erhaltenen Produkt so viel Decimalstellen giebt, wie beide Faktoren zusammengenommen haben. Der Grund dieses Verfahrens ergiebt sich einfach aus der Richtigkeit der Formel: $\frac{a}{10^n} \cdot \frac{b}{10^m} = \frac{a \cdot b}{10^{n+m}}$.

z. B.
3,243
0,416
19458
3243
12972
1,349088

oder

3,243
0,416
12972
3243
19458
1,349088

Wenn $\frac{a}{10^n}$ und $\frac{b}{10^m}$ abgekürzte Brüche, und $\frac{a+x}{10^n}$, so wie $\frac{b+y}{10^m}$ die genauen Werthe derselben sind, dann können die Fehler x und y ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen nur $\frac{1}{2}$ oder kleiner als $\frac{1}{2}$ sein. Der bei der Multiplikation der abgekürzten Brüche begangene Fehler ist daher

$$\frac{(a+x)(b+y)-ab}{10^{n+m}} = \frac{ax+by+xy}{10^{n+m}} \text{ oder } \frac{ax+by}{10^{n+m}},$$

wenn man nur die n + m ersten Decimalstellen haben will. Im ungünstigsten Falle ist $x = y = \pm\frac{1}{2}$; der bei der Multiplikation begangene Fehler wird daher im Allgemeinen kleiner als $\frac{\frac{1}{2}(a+b)}{10^{n+m}}$

sein. Der Fehler im Produkt kann sich also auf so viel Stellen erstrecken, als die Zahl $\frac{1}{2}(a+b)$ Stellen hat.

Da man in den Anwendungen gewöhnlich mit abgekürzten Decimalbrüchen rechnet, so ist es vortheilhaft, beim Multipliciren sogleich diejenigen Decimalstellen fortzulassen, welche unsicher sind. Hierzu eignet sich aber das rechts stehende Schema am besten, wenn man dabei alle rechts herausgerückten Decimalstellen fortläßt. Man multiplicire nämlich zuerst den ganzen Multiplikandus mit der am weitesten links stehenden geltenden Ziffer des Multiplikators, denke dann diese und die letzte Ziffer des Multiplikandus fort, multiplicire nun mit der folgenden Ziffer des Multiplikators alle übrigen Ziffern des Multiplikandus, beobachte aber dabei die Vorsicht, daß man die eben fortgedachte Ziffer desselben in Gedanken mit multiplicirt und die sich dabei vielleicht ergebenden Zehner zu dem Produkt addirt; dies so erhaltene Produkt setze man, ohne es herauszurücken, unter das vorige, denke dann wieder diejenige Ziffer des Multiplikators, mit welcher so eben multiplicirt wurde, und die nächste Ziffer des Multiplikandus fort, und setze dann mit der folgenden Ziffer des Multiplikators die Rechnung auf die beschriebene Weise fort. Während man nun bei der gewöhnlichen Multiplikation dem Produkt so viel Decimalstellen geben mußte, wie beide Faktoren zusammengenommen haben, so muß man hier so viel weniger abschneiden, wie der Multiplikator Ziffern hat minus 1, da so viel Stellen nicht herausgerückt worden sind. Beachtet man dabei außerdem die im §. 99. für das Abkürzen der Decimalbrüche gegebene Regel, so stellt sich das Verfahren wie folgt dar:

```
 3,4562134
 0,2376349
----------
  69124268
  10368640
   2419349
    207373
     10369
      1382
       311
----------
0,82131692
```

Das gewöhnliche Verfahren ergiebt als Resultat: 0,82131692568766; wären die Faktoren abgekürzte Brüche, dann würden im ungünstigsten Falle die 8 letzten Decimalen unsicher sein.

Ist in dem Produkt 0,235 . 10000 der Fehler am Zähler 235 nahe $\frac{1}{2}$, dann ergiebt sich aus $\frac{ax+by}{10^{n+m}}$, daß in 2350 die Einer falsch sind, welches aber auch schon ohne diese Formel klar ist.

3) Soll man einen Decimalbruch durch einen anderen Decimalbruch dividiren, dann multiplicire man Dividendus und Divisor mit dem Nenner des Divisors, wodurch die Aufgabe zurückgeführt wird auf die Verwandlung eines Bruches in einen Decimalbruch; denn $\frac{a}{10^n} : \frac{b}{10^m} = \frac{a\,.\,10^m}{10^n} : b$.

Beispiele: $\frac{1,26}{0,3} = \frac{12,6}{3} = 4,2.$

$$\frac{1,66662}{0,47} = \frac{166,662}{47} = 3,546.$$

$$\frac{34,818234}{8,756} = \frac{34818,234}{8756} = 3,9765.$$

$$\frac{0,7672}{0,000274} = \frac{767200}{274} = 2800.$$

Durch eine einfache Umformung ergiebt sich, daß

$$\frac{a+x}{b+y} = \frac{a}{b} - \frac{ay - bx}{b\,(b+y)} \text{ ist, mithin hat man auch:}$$

$$\frac{a+x}{10^n} : \frac{b+y}{10^m} = \frac{a\,.\,10^m}{10^n} : b - \frac{(ay - bx)\,10^m}{10^n} : b\,(b+y).$$

Der durch die Division zweier abgekürzten Decimalbrüche entstandene Fehler ist demnach:

$$\frac{(ay - bx)\,10^m}{10^n} : b\,(b+y);$$

derselbe kann hiernach, wenn die Fehler x und y der Zähler gegeben sind, berechnet werden. Wie man aus dem Nenner $b\,(b+y)$ ersieht, sind die ersten Stellen des Quotienten $\frac{a\,.\,10^m}{10^n} : b$ unabhängig von den Fehlern x und y, weshalb man auch nur diese ersten Stellen berechnet, und zwar nach folgendem abgekürzten Verfahren:

Man suche die erste Stelle des Quotienten auf die gewöhnliche Weise; anstatt aber bei jeder neuen Division eine neue Ziffer des Dividendus herunterzusetzen oder eine Null anzuhängen, lasse man die letzte Decimalstelle des Divisors fort. Damit hierbei der Fehler aber nicht zu groß werde, muß man dieselbe Vorsicht wie bei der abgekürzten Multiplikation beobachten, z. B.

```
0,3478215 | 3,4213871 | 9,836618
            31303935
             2909936
             2782572
              127364
              104346
               23018
               20869
                2149
                2087
                  62
                  35
                  27
                  27
```

Das gewöhnliche Verfahren ergiebt als Resultat:

9,83661763 ...

Viertes Kapitel.
Von den Kettenbrüchen.

§. 106.

Ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Zahl plus einem Bruch, dessen Zähler wieder 1 und dessen Nenner eine ganze Zahl plus einem Bruch u. s. w. ist, also ein Ausdruck von der Form:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}$$

heißt ein Kettenbruch, auch wohl ein kontinuirlicher Bruch.

§. 107.

Die einzelnen Brüche, aus denen ein Kettenbruch besteht, heißen die Glieder desselben, und zwar $\frac{1}{a}$ das erste, $\frac{1}{b}$ das zweite Glied u. s. w. Die Nenner dieser einzelnen Brüche werden auch die Nenner des Kettenbruchs genannt.

§. 108.

Ein Kettenbruch ist entweder begrenzt, oder er geht bis ins Unendliche fort; im letzteren Falle heißt er periodisch, wenn entweder alle Nenner einander gleich sind, oder eine gewisse Anzahl derselben in derselben Ordnung immer wiederkehrt. Z. B.

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}} \quad \text{oder:} \quad \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ldots}}}}$$

§. 109.

Soll ein gewöhnlicher Bruch z. B. $\frac{95}{203}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, so dividire man Zähler und Nenner desselben durch den Zähler, dann erhält man:

$$\frac{95}{203} = \frac{1}{2 + \frac{13}{95}}$$

Mit dem im Nenner erscheinenden Bruch verfahre man auf die-

selbe Weise und setze die Rechnung so lange fort, bis auch der Zähler des letzten Bruches gleich 1 wird; also

$$\frac{95}{203} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}$$

Betrachtet man das angewendete Verfahren näher, so erkennt man, daß man jeden Nenner des Kettenbruchs erhalten hat, indem man mit dem Zähler des gegebenen Bruches in seinen Nenner, dann mit dem Rest in den vorigen Divisor und so fort dividirte. Man braucht daher nur zu Zähler und Nenner des gegebenen Bruches auf die im §. 81. angegebene Art den größten gemeinschaftlichen Theiler zu suchen, so sind die sich dabei ergebenden Quotienten in derselben Ordnung die Nenner des Kettenbruches.

```
95 | 203 | 2
     190
     ---
      13 | 95 | 7
           91
           --
            4 | 13 | 3
                12
                --
                 1 | 4 | 4
                     4
                     -
```

also $\frac{95}{203} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}}$

Man erkennt ferner sehr leicht, daß, wenn der gegebene Bruch nicht gehoben wäre, man doch jedesmal denselben Kettenbruch erhalten würde, welcher sich aus dem gehobenen Bruch ergiebt, weil die einzelnen Quotienten in beiden Fällen dieselben sein müssen, und daß endlich jeder gewöhnliche Bruch allemal auf einen begrenzten Kettenbruch führt.

§. 110.

Soll der im §. 106. als Beispiel angeführte Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so braucht man nur die angedeuteten Rechnungen von unten herauf auszuführen. Man verwandele also zuerst die gemischte Zahl $c + \frac{1}{d}$ in den unächten Bruch $\frac{cd+1}{d}$, dividire damit in 1, d. h. kehre ihn um, wodurch man $\frac{d}{cd+1}$ erhält und verwandele dann wieder die ge-

mischte Zahl $b + \frac{d}{cd+1}$ in den unächten Bruch $\frac{bcd+b+d}{cd+1}$ u. s. w. Dadurch erhält man folgendes Schema:

$$c + \frac{1}{d} = \frac{cd+1}{d}$$

$$b + \frac{d}{cd+1} = \frac{bcd+b+d}{cd+1}$$

$$a + \frac{cd+1}{bcd+b+d} = \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d},$$ also der ganze

Kettenbruch $= \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$.

§. 111.

Es sei der in §. 106. und 110. angeführte Kettenbruch gegeben, so heißt eine gewisse Anzahl auf einander folgender Glieder, vom ersten ab gerechnet, ein Partialbruch des gegebenen Kettenbruchs und zwar:

das erste Glied $\frac{1}{a}$ der erste Partialbruch

die beiden ersten Glieder $\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$ der zweite Partialbruch u. s. w.

§. 112.

Jeder ungerade Partialbruch ist größer, und jeder gerade Partialbruch ist kleiner als der Werth des Kettenbruches selbst.

Beweis. Von zwei Brüchen, welche gleiche Zähler haben, ist nach §. 62. Nr. 2. derjenige der größere, welcher den kleineren Nenner hat; da nun

$$a < a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}},$$ so ist

$$\frac{1}{a} > \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}$$

also der erste Partialbruch größer als der Kettenbruch. Da ferner aus demselben Grunde:

$$\frac{1}{b} > \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}, \text{ folglich auch}$$

$$a + \frac{1}{b} > a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} \text{ ist,}$$

$$\text{so ist } \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}} < \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}$$

also der zweite Partialbruch kleiner als der Kettenbruch u. s. w.

§. 113.

Denkt man sich alle Partialbrüche eines Kettenbruches in gewöhnliche Brüche verwandelt, so heißen letztere die **Näherungswerthe** des Kettenbruchs.

Der Werth des ganzen Kettenbruchs möge in den folgenden §§. durch $\frac{N}{M}$, seine verschiedenen Näherungswerthe der Reihe nach mit $\frac{N_1}{M_1}$, $\frac{N_2}{M_2}$, $\frac{N_3}{M_3}$ u. s. w. bezeichnet werden, so daß hiernach $\frac{N_n}{M_n}$ den $n$ten Näherungswerth des Kettenbruchs vorstellt.

§. 114.

In dem in §. 106 angegebenen Kettenbruche ist der erste Näherungswerth $\frac{N_1}{M_1} = \frac{1}{a}$; der zweite wird erhalten, wenn man $a + \frac{1}{b}$ statt a setzt, nämlich:

$$\frac{N_2}{M_2} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}} = \frac{b}{ab + 1}.$$

Der dritte wird erhalten, wenn man $b + \frac{1}{c}$ statt b setzt.

$$\frac{N_3}{M_3} = \frac{b + \frac{1}{c}}{a\,(b + \frac{1}{c}) + 1} = \frac{cb + 1}{c\,(ab + 1) + a} = \frac{cN_2 + N_1}{cM_2 + M_1}.$$

Der vierte wird erhalten, wenn $c + \frac{1}{d}$ statt c gesetzt wird.

$$\frac{N_4}{M_4} = \frac{(c + \frac{1}{d})\,N_2 + N_1}{(c + \frac{1}{d})\,M_2 + M_1} = \frac{dcN_2 + N_2 + dN_1}{dcM_2 + M_2 + dM_1}$$

$$=\frac{d\,(cN_2 + N_1) + N_2}{d\,(cM_2 + M_1) + M_2} = \frac{d\,.\,N_3 + N_2}{d\,.\,M_3 + M_2} \text{ u. s w.}$$

Hieraus ergiebt sich die Abhängigkeit eines beliebigen Näherungswerthes von den beiden nächst vorhergehenden. Ist nämlich der n te Nenner des Kettenbruchs p, so erhält man den n ten Näherungswerth $\frac{N_n}{M_n}$, wenn man Zähler und Nenner des (n—1)ten Näherungswerthes mit p multiplicirt, und zu dem so erhaltenen Zähler den Zähler, und zum erhaltenen Nenner den Nenner des (n—2)ten Näherungswerthes addirt. Es ist dann

$$\frac{N_n}{M_n} = \frac{p\,.\,N_{n-1} + N_{n-2}}{p\,.\,M_{n-1} + M_{n-2}}.$$

§. 115.

Nimmt man daher die beiden ersten Näherungswerthe unmittelbar aus dem gegebenen Kettenbruch, so können alle übrigen Näherungswerthe der Reihe nach durch obiges Gesetz gefunden werden. Will man sich den zweiten Näherungswerth nach demselben Gesetz entstanden denken, so braucht man nur anzunehmen, es sei der dem ersten nächst vorhergehende Näherungswerth (der in der Wirklichkeit gar nicht existirt) gleich $\frac{0}{1}$.

Nach folgendem Schema lassen sich dann leicht alle Näherungswerthe und zuletzt der Werth des ganzen Kettenbruches finden.

Es seien die Nenner der Reihe nach:

4, 3, 2, 1, 2, 3, so ergiebt sich:

	4	3	2	1	2	3
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{10}{43}$	$\frac{27}{116}$	$\frac{91}{391}$

§. 116.

Sind $\frac{N_{n-1}}{M_{n-1}}$, $\frac{N_n}{M_n}$ und $\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}$ drei auf einander folgende beliebige Näherungswerthe, und ist dabei

$$\frac{N_{n-1}}{M_{n-1}} - \frac{N_n}{M_n} = \frac{\pm 1}{M_{n-1}\,.\,M_n},$$ oder was dasselbe ist

$N_{n-1}\,.\,M_n - N_n\,.\,M_{n-1} = \pm 1$, so ist auch

$$\frac{N_n}{M_n} - \frac{N_{n+1}}{M_{n+1}} = \frac{\mp 1}{M_n\,.\,M_{n+1}}.$$

Beweis. Es sei der letzte Nenner des $(n+1)$ten Partialbruchs p, so folgt aus §. 114.:

$$\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}} = \frac{p \cdot N_n + N_{n-1}}{p \cdot M_n + M_{n-1}}; \text{ also ist}$$

$$\frac{N_n}{M_n} - \frac{N_{n+1}}{M_{n+1}} = \frac{N_n}{M_n} - \frac{p \cdot N_n + N_{n-1}}{p \cdot M_n + M_{n-1}} \text{ oder}$$

$$= \frac{N_n \cdot (p M_n + M_{n-1}) - M_n (p N_n + N_{n-1})}{M_n (p M_n + M_{n-1})}$$

$$= \frac{N_n \cdot M_{n-1} - M_n \cdot N_{n-1}}{M_n \cdot M_{n+1}} = \frac{\mp 1}{M_n \cdot M_{n+1}}.$$

§. 117.

Der Unterschied des ersten und zweiten Näherungswerthes ist

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{ab+1} = \frac{ab+1-ab}{a(ab+1)} = \frac{1}{a(ab+1)},$$

also $\frac{N_1}{M_1} - \frac{N_2}{M_2} = \frac{1}{M_1 \cdot M_2}$, folglich ist:

$$\frac{N_2}{M_2} - \frac{N_3}{M_3} = \frac{-1}{M_2 \cdot M_3}, \text{ ferner}$$

$$\frac{N_3}{M_3} - \frac{N_4}{M_4} = \frac{+1}{M_3 \cdot M_4} \text{ u. s. w.,}$$

d. h. Der Unterschied je zweier unmittelbar auf einander folgender Näherungswerthe ist gleich einem Bruch, dessen Zähler ± 1 und dessen Nenner das Produkt der Nenner beider Näherungswerthe ist.

Da nun nach §. 112. der eine von zwei aufeinander folgenden Näherungswerthen jedesmal größer, der andere kleiner als der Werth des ganzen Kettenbruches ist, so unterscheidet sich jeder derselben von letzterem um weniger als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Produkt der Nenner beider Näherungswerthe ist.

§. 118.

Zähler und Nenner eines jeden Näherungswerthes sind jedesmal relative Primzahlen.

Beweis. Es seien $\frac{N_n}{M_n}$ und $\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe, so ist ihr absoluter Unterschied nach §. 116. gleich $\frac{1}{M_n \cdot M_{n+1}}$, also ist

$$N_n \cdot M_{n+1} - M_n \cdot N_{n+1} = 1.$$

Hätten nun N_n und M_n außer 1 noch einen gemeinschaftlichen Theiler, so müßten auch ihre Vielfachen und also auch die Differenz ihrer Vielfachen, also 1, denselben gemeinschaftlichen Theiler haben, was nicht möglich ist.

§. 119.

Es giebt keinen Bruch, welcher, in einem kleineren Nenner ausgedrückt, dem Kettenbruche näher käme, als einer seiner Näherungswerthe.

Beweis. Es sei $\frac{N_n}{M_n}$ ein beliebiger und $\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}$ der nächst folgende Näherungswerth des Kettenbruches $\frac{N}{M}$, es sei ferner $\frac{P}{Q}$ ein beliebiger Bruch, dessen Nenner Q kleiner als M_n ist, so soll gezeigt werden, daß der Unterschied von $\frac{P}{Q}$ und $\frac{N}{M}$ absolut genommen größer als $\frac{1}{M_n . M_{n+1}}$ ist.

Der kleinste Unterschied, welcher zwischen zwei gegebenen Brüchen stattfinden kann, ist ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Produkt beider gegebenen Nenner ist. Der absolute Unterschied zwischen $\frac{P}{Q}$ und jedem der beiden Näherungswerthe ist daher wenigstens $\frac{1}{M_n . Q}$ und $\frac{1}{M_{n+1} . Q}$, also größer als der Unterschied beider Näherungswerthe unter sich, der gleich $\frac{1}{M_n . M_{n+1}}$ ist. $\frac{P}{Q}$ kann daher nicht zwischen $\frac{N_n}{M_n}$ und $\frac{N_{n+1}}{M_{n+1}}$ liegen. Da nun der Werth des ganzen Kettenbruches $\frac{N}{M}$ jedesmal zwischen zwei auf einander folgenden Näherungswerthen liegt, so ist er von $\frac{P}{Q}$ noch um mehr als $\frac{1}{M_n . Q}$ und $\frac{1}{M_{n+1} . Q}$, also auch um mehr als $\frac{1}{M_n . M_{n+1}}$ unterschieden.

§. 120.

Man kann sich daher der Theorie der Kettenbrüche bedienen, um für einen gegebenen Bruch $\frac{A}{B}$, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, der sich also genau nicht mehr in kleineren Zahlen ausdrücken läßt, eine Reihe von Näherungswerthen zu finden, welche, in kleineren Zahlen ausgedrückt, dem gegebenen Bruche so nahe kommen, daß, wenn einer dieser Näherungswerthe

statt des gegebenen Bruches gesetzt wird, es dann keinen zweiten Bruch mehr giebt, welcher in noch kleineren Zahlen ausgedrückt, dem Bruch $\frac{A}{B}$ ebenso nahe oder noch näher käme.

Uebungen zum fünften Abschnitt.

I. Uebertragung einer numerischen Zahl aus einem System in ein anderes (Zu §. 78.)

1.	26	aus dem 10 theil.	ins 5 theil.	System giebt	101.	
2.	368	„ „ 10 „	„ 8 „	„ „	560.	
3.	23	„ „ 10 „	„ 4 „	„ „	113.	
4.	35	„ „ 6 „	„ 10 „	„ „	23.	
5.	11120	„ „ 3 „	„ 10 „	„ „	123.	
6.	25	„ „ 9 „	„ 10 „	„ „	23.	
7.	27	„ „ 8 „	„ 7 „	„ „	32.	
8.	113	„ „ 4 „	„ 2 „	„ „	10111.	
9.	189	„ „ 10 „	„ 11 „	„ „	162.	wobei die zehnte Ziffer *a* sein mag
10.	102	„ „ 11 „	„ 10 „	„ „	123.	
11.	841	„ „ 10 „	„ 11 „	„ „	6*a*5.	
12.	*a*8*a*	„ „ 11 „	„ 10 „	„ „	1308.	

II. Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers. (Zu §. 81., 82. und 92.)

1.	Von 9982	und 67735	ist derselbe gleich	713.
2.	„ 19143	„ 150308	„ „ „	709.
3.	„ 19035	„ 168495	„ „ „	705.
4.	„ 12177	„ 120540	„ „ „	123.
5.	„ 1000	„ 5069	„ „ „	1.
6.	„ 47871, 134748	„ 24428	„ „ „	197.
7.	„ 12324, 14931	„ 18249	„ „ „	237.
8.	„ 13104, 16848, 24024	„ 6048	„ „ „	24.

III. Zerlegung in Primfaktoren. (Zu §. 90. Nr. 2. und §. 94.)

1. $360 = 2^3 . 3^2 . 5$.
2. $432 = 2^4 . 3^3$.
3. $576 = 2^6 . 3^2$.
4. $1080 = 2^3 . 3^3 . 5$.
5. $3675375 = 3^5 . 5^3 . 11^2$.
6. $10378368 = 2^7 . 3^4 . 7 . 11 . 13$.
7. $138752757 = 3^6 . 11^4 . 13$.
8. $50875 = 5^3 . 11 . 37$.
9. $1953125 = 5^9$.
10. $1048576000 = 2^{23} . 5^3$.

11. $ax \pm x = (a \pm 1)x$.
12. $15ab + 20bc = 5b(3a + 4c)$.
13. $4a^2 + 12ab - 6ab^2 = 2a(2a + 6b - 3b^2)$.
14. $12abc - 21acx + 18bcx = 3c(4ab - 7ax + 6bx)$.
15. $3a^2b^6 - 4a^3b^5 + a^4b^4 = a^2b^4(3b^2 - 4ab + a^2)$.
16. $21a^6x^5y^3 - 28a^4x^7y^5 - 42a^3x^8y^4 = 7a^3x^5y^3(3a^3 - 4ax^2y^2 - 6x^3y)$.
17. $6ac + 9bc - 2ad - 3bd = (2a + 3b)(3c - d)$.
18. $ac + 2bc + ad + 2bd = (a + 2b)(c + d)$.
19. $bc - 2b^2 - ac + 2ab = (b - a)(c - 2b)$.
20. $2a^2 + 5a - 4ab - 10b = (a - 2b)(2a + 5)$.
21. $16a^2 - 9b^2 = (4a + 3b)(4a - 3b)$.
22. $25x^2 - 1 = (5x + 1)(5x - 1)$.
23. $4a^2b^2 - c^2 = (2ab + c)(2ab - c)$.
24. $36x^2 - \frac{9}{4}y^2 = (6x + \frac{3}{2}y)(6x - \frac{3}{2}y)$.
25. $\frac{9x^2}{16} - \frac{16y^2}{25} = (\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}y)(\frac{3}{4}x - \frac{4}{5}y)$.
26. $\frac{4a^4x^6}{b^8y^2} - \frac{9b^2y^4}{a^2x^8} = \left(\frac{2a^2x^3}{b^4y} + \frac{3by^2}{ax^4}\right)\left(\frac{2a^2x^3}{b^4y} - \frac{3by^2}{ax^4}\right)$.
27. $a^2 \pm 2a + 1 = (a \pm 1)^2$.
28. $4a^2 \pm 12ab + 9b^2 = (2a \pm 3b)^2$.
29. $n^3 - 2n^2 + n = n(n - 1)^2$.
30. $12a^3 - 60a^2b + 75ab^2 = 3a(2a - 5b)^2$.
31. $81a^4 - 18a^2 + 1 = (3a + 1)^2(3a - 1)^2$.
32. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$.
33. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2 = (a + b + c)(a - b - c)$.
34. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = (a + b - c)(a - b + c)$.
35. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)$
$(b + c - a)$.
36. $4a^2b^2 + 8abcd + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 =$
$(a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a)$.
37. $27x^3 + 8y^3 = (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$.
38. $x^6 - y^6 = (x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.
39. $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.
40. $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$.
41. $a^2 + 8ab + 15b^2 = (a + 3b)(a + 5b)$.
42. $4x^3 + 5x^2 - 6x = x(4x - 3)(x + 2)$.
43. $15a^2 + ab - 6b^2 = (5a - 3b)(3a + 2b)$.
44. $6a^2 - 13ab + 6b^2 = (2a - 3b)(3a - 2b)$.
45. $5a^4 - 18a^2b^2 + 9b^4 = (5a^2 - 3b^2)(a^2 - 3b^2)$.
46. $5b^4 - 6b^2c^2 + c^4 = (b + c)(b - c)(5b^2 - c^2)$.
47. $3a^2b - 3b^3 - a^3 + ab^2 = (a + b)(a - b)(3b - a)$.
48. $8a^3 + b^3 = (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$.
49. $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$.
50. $x^8 - 1 = (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.

IV. Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

(Zu §. 91 und 94.)

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

1. von 8, 9, 12, 18 ist 72.
2. „ 60, 84, 45, 56 ist 2520.
3. „ 210, 180, 660 ist 13860.
4. „ 15, 77, 154, 182 ist 30030.
5. „ 360, 300, 630, 252 ist 12600.
6. „ 252, 540, 385 ist 41580.
7. „ 3696, 1632, 4675 ist 3141600.
8. „ 36, 66, 81, 108, 396, 1782 ist 3564.
9. „ 35, 120, 84, 42, 210, 16 ist 1680.
10. „ 25, 48, 72, 12, 75, 80, 96, 100 ist 7200.
11. „ 44, 48, 72, 15, 25, 20, 22, 66, 144 ist 39600.
12. „ 80, 45, 6, 22, 21, 33 ist 55440.
13. „ $12b^2$, $8ac$, $3bc$ ist $24ab^2c$.
14. „ $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$ ist $(a+b)^2(a-b)$.
15. „ $3a - 3b$, $5ac + 5bc$, $a^2d - b^2d$ ist $15cd(a+b)(a-b)$.
16. „ $3a^2 - 3ab$, $4a^2 - 2ab$, $3a^2 - ab$, $24a^2 - 6ab$ ist $6a(a-b)(2a-b)(3a-b)(4a-b)$.
17. „ $ac - c^2$, $5ac - 10c^2$, $a^2 - 3ac + 2c^2$ ist $5c(a-2c)(a-c)$.
18. „ $2a + 6b$, $ac - 2ad + 3bc - 6bd$, $2c - 4d$ ist $2(a+3b)(c-2d)$.
19. „ $ad - a - bd + b$, $2ac + ab - 2bc - b^2$, $2cd + bd - 2c - b$ ist $(a-b)(2c+b)(d-1)$.
20. „ $x^2 + 2x - 3$, $2xy + 6y$, $2x - 2$ ist $2(x-1)(x+3)y$.

V. Heben der Brüche.

(Zu §. 93. Nr. 1.)

1. $\frac{10395}{85185} = \frac{77}{631}$.
2. $\frac{43395}{341637} = \frac{55}{433}$.
3. $\frac{6935}{61393} = \frac{95}{841}$.
4. $\frac{30120}{235689} = \frac{40}{313}$.
5. $\frac{18927}{186466} = \frac{27}{266}$.
6. $\frac{32376}{324072} = \frac{1349}{13503}$.
7. $\frac{9215}{90792} = \frac{95}{936}$.
8. $\frac{38227}{59899} = \frac{127}{199}$.
9. $\frac{a^2 - 2ab}{ab - 2b^2} = \frac{a}{b}$.
10. $\frac{10a^2 - 2ab}{15ab - 3b^2} = \frac{2a}{3b}$.
11. $\frac{3a^2b - 5ab^2}{5bcd - 3acd} = -\frac{ab}{cd}$.
12. $\frac{2a^2 + 4ab}{3ab + 6b^2} = \frac{2a}{3b}$.
13. $\frac{a^3 - 2a^2b + 3a^2c}{abc - 2b^2c + 3bc^2} = \frac{a^2}{bc}$.
14. $\frac{3a^4c + 5a^3bc - 2a^3c^2}{2ab^2c^2 - 3a^2b^2c - 5ab^3c} = -\frac{a^2}{b^2}$.
15. $\frac{21a^5b^5c^3 - 35a^5b^3c^5 - 49a^3b^5c^5}{35a^2b^4c^6 - 15a^4b^4c^4 + 25a^4b^2c^6} = -\frac{7ab}{5c}$.

16. $\frac{3a^4c^2 - 9a^2c^4}{6a^2b^2c^2 - 3a^2c^4} = \frac{a^2 - 3c^2}{2b^2 - c^2}$.

17. $\frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 1} = \frac{a + 1}{a - 1}$.

18. $\frac{a^2 - 1}{ab + b} = \frac{a - 1}{b}$.

19. $\frac{a^3 - 4a^2}{a^2 - 16} = \frac{a^2}{a + 4}$.

20. $\frac{4a^2 - 25b^2}{4a^2 + 20ab + 25b^2} = \frac{2a - 5b}{2a + 5b}$.

21. $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a - b}$.

22. $\frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2} = \frac{a + b + c}{a - b + c}$.

23. $\frac{ac + bd + ad + bc}{ab + b^2 + 2ac + 2bc} = \frac{c + d}{b + 2c}$.

24. $\frac{6a^2 - 3b - 2a^4 + a^2b}{9a^2 - 3c^2 - 3a^4 + a^2c^2} = \frac{2a^2 - b}{3a^2 - c^2}$.

25. $\frac{2a^2c^2 - 3a^2b^2 - 2b^2c^2 + 3b^4}{3a^2c^2 + 2b^4 - 2a^2b^2 - 3b^2c^2} = \frac{2c^2 - 3b^2}{3c^2 - 2b^2}$.

26. $\frac{6a^2c^2 - 2a^4 + 18bc^2 - 6a^2b}{4a^4 + 2a^2c^2 + 12a^2b + 6bc^2} = \frac{3c^2 - a^2}{2a^2 + c^2}$.

27. $\frac{4a^4c - 10a^2b^2c + 6b^4c}{3a^2b^4 - 2a^4b^2} = \frac{2c(b + a)(b - a)}{a^2b^2}$.

28. $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x + 3}{x - 3}$.

29. $\frac{2x^3 + 5x^2 - 12x}{7x^3 + 25x^2 - 12x} = \frac{2x - 3}{7x - 3}$.

30. $\frac{4a^2 - 7ab + 3b^2}{5a^2 - 3ab - 2b^2} = \frac{4a - 3b}{5a + 2b}$.

31. $\frac{ac + 2bc - 2bd - ad}{2a^2 + 5ab + 2b^2} = \frac{c - d}{2a + b}$.

32. $\frac{4a^2 + 8ab + 3b^2}{2ac + 3bc - 2ad - 3bd} = \frac{2a + b}{c - d}$.

VI. Bestimmung des Werthes von $\frac{0}{0}$.

(Zu §. 53.)

1. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ ist, wenn $x = 2$, gleich $\frac{3}{4}$.

2. $\frac{a^2 - 5ab + 4b^2}{a^2 + ab - 2b^2}$ ist, wenn $a = b$, gleich -1.

3. $\frac{16 - x^4}{2 - x}$ ist, wenn $x = 2$, gleich 32.

4. $\frac{a^2 - b^2}{2a^2 - ab - b^2}$ ist, wenn $a = b$, gleich $\frac{2}{3}$.

5. $\frac{a^2 - 2az + z^2}{a^2 - z^2}$ ist, wenn $a = z$, gleich 0.

6. $\frac{a^2 - ab - 2b^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}$ ist, wenn $a = 2b$, gleich ∞.

7. $\frac{a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4}{a^4 - 3a^2b^2 - 4b^4}$ ist, wenn $a = 2b$, gleich $\frac{3}{5}$.

8. $\frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{2x^2 - xy - 15y^2}$ ist, wenn $x = 3y$, gleich 0.

VII. Addition und Subtraktion von Brüchen.

(Zu. §. 93. Nr. 2.)

1. $\frac{7}{25} + \frac{3}{8} + \frac{9}{20} + \frac{11}{400} + \frac{1}{10} - \frac{13}{125} = \frac{1091}{1000}$.
2. $\frac{1}{7} + \frac{9}{40} + \frac{13}{56} + \frac{1}{12} + \frac{25}{96} = \frac{2759}{2940}$.
3. $\frac{5}{102} + \frac{3}{44} + \frac{2}{187} - \frac{7}{132} = \frac{14}{187}$.
4. $\frac{5}{286} + \frac{3}{220} - \frac{1}{100} - \frac{2}{325} = \frac{107}{7150}$.
5. $\frac{5}{9} + \frac{1}{4} + \frac{19}{24} + \frac{23}{60} + \frac{17}{16} + \frac{51}{35} - \frac{43}{12} = \frac{4621}{5040}$.
6. $\frac{49}{252} + \frac{413}{540} + \frac{178}{385} = 1\frac{1753}{4158}$.
7. $\frac{25}{49} + \frac{16}{19} + \frac{21}{25} + \frac{17}{100} + \frac{24}{33} + \frac{47}{50} + \frac{16}{81} = 4\frac{270857}{1306220}$.
8. $8\frac{47}{420} - 5\frac{191}{252} - 1\frac{269}{280} + 3\frac{163}{168} = 4\frac{229}{630}$.
9. $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} - \frac{c}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}$.
10. $\frac{5x}{3y} - \frac{2}{9xy} + \frac{5y}{6x} = \frac{30x^2 - 4 + 15y^2}{18xy}$.
11. $\frac{1}{2a} - \frac{3}{4b} + \frac{2}{3a} = \frac{14b - 9a}{12ab}$.
12. $\frac{a}{2b} + \frac{b}{3c} + \frac{3}{5a} = \frac{15a^2c + 10ab^2 + 18bc}{30abc}$.
13. $\frac{c}{2ab} + \frac{4a}{21bc} - \frac{5b}{4ac} = \frac{42c^2 + 16a^2 - 105b^2}{84abc}$.
14. $\frac{5a - 2b}{2} + \frac{3a - 5b}{3} = \frac{21a - 16b}{6}$.
15. $\frac{15a + 4b}{12} - \frac{3b - 22a}{9} = \frac{133a}{36}$.
16. $\frac{4a - 23b}{4} - \frac{4a - 25b}{6} + \frac{19b - 3a}{12} = \frac{a}{12}$.
17. $\frac{3a + 2b}{a} + \frac{2a^2 - 2b^2}{ab} - \frac{2a + 3b}{b} = 0$.
18. $\frac{3x - 2y}{3} - \frac{4y + 2x}{5} + \frac{22y - 9x}{15} = 0$.
19. $\frac{a - b}{a} + \frac{a^2(b + 1) + b^2(a + 1)}{ab} - \frac{a + b}{b} = a + b$.
20. $\frac{29a}{90} - \frac{3a - 20b}{60} + \frac{3a - 10b + 5c}{20} - \frac{4a - 2b + 3c}{12} = \frac{4a}{45}$.
21. $\frac{4a - 3b + 2c}{9} - \frac{b + c - 3a}{4} + \frac{b - 2a}{2} - \frac{2a - b}{3} + \frac{c - b + 2a}{6}$

$$= \frac{-5a + 3b + 5c}{36}.$$

22. $\frac{a-4b-3c}{4}-\frac{c-a}{2}-\frac{3a-4b-6c}{3}+\frac{2a-b-3c}{7}-$

$\frac{6b+6c-2a}{21}=\frac{11a-8b+3c}{84}.$

23. $\frac{7b-5a}{3b}-\frac{c-7a}{a}+\frac{a+5c}{5a}+\frac{11a}{6b}=\frac{5a+286b}{30b}.$

24. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}.$

25. $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=\frac{2x}{1-x^2}.$

26. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$

27. $\frac{2b}{a}+\frac{b}{2a+1}=\frac{5ab+2b}{2a^2+a}.$

28. $\frac{5b}{a+5b}-\frac{a}{a-5b}=-\frac{a^2+25b^2}{a^2-25b^2}.$

29. $\frac{8}{3x-6}+\frac{1}{3x+3}=\frac{3x+2}{x^2-x-2}.$

30. $\frac{2b}{a^2+2ab}+\frac{a}{2ab+4b^2}=\frac{a^2+4b^2}{2ab(a+2b)}.$

31. $\frac{3a}{3a-b}-\frac{3ab}{9a^2-b^2}=\frac{9a^2}{9a^2-b^2}.$

32. $\frac{5a}{6b}-\frac{10a^2-17ab}{12ab-6b^2}-\frac{b}{b-2a}=\frac{2a+b}{2a-b}.$

33. $\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a-b}-\frac{b}{a}=\frac{b(a^2+b^2)}{a(a^2-b^2)}.$

34. $\frac{3}{x}-\frac{1}{2+2x}+\frac{5}{1-3x}=\frac{6-3x-5x^2}{2x-4x^2-6x^3}.$

35. $\frac{b-1}{a-b}+\frac{1}{a+b}-\frac{ab^2-b^3+2a^2b-2ab}{a^3-ab^2}=-\frac{b}{a}.$

36. $\frac{9}{10x-20}-\frac{26}{15x+45}+\frac{5}{6x}=\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}.$

37. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a+c}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}=0.$

38. $\frac{x^2}{3y^2}-\frac{x^2y^2}{3y^4-x^4}+\frac{x^6}{9y^6-3x^4y^2}+x=x.$

39. $\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}.$

40. $\frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8-8x}+\frac{1}{8+8x}-\frac{1-x}{4(1+x^2)}=\frac{1+x+x^2}{1-x-x^4+x^5}$

41. $\frac{1}{3a^2-3ab}-\frac{5}{4a^2-2ab}+\frac{5}{3a^2-ab}-\frac{17}{24a^2-6ab}=$

$\frac{a^2+b^2}{(a-b)(2a-b)(3a-b)(4a-b)}.$

42. $\frac{7}{3a^2-6ab}-\frac{57}{4a^2-6ab}+\frac{74}{3a^2-4ab}-\frac{305}{24a^2-30ab}=$

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a-2b)(2a-3b)(3a-4b)(4a-5b)}$$

43. $-\frac{1}{a^2-ab}-\frac{1}{3a^2+3ab}+\frac{11}{6a^2-12ab}+\frac{1}{2a^2+4ab}=\frac{a^2+2ab+3b^2}{(a^2-b^2)(a^2-4b^2)}.$

44. $\frac{b-a}{c-2b}+\frac{2ab+c^2}{bc-2b^2-ac+2ab}-\frac{a^2+b^2+c^2}{bc-2ab-ac+2a^2}=\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{(c-2a)(c-2b)}.$

45. $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}-\frac{2a^2+a-3}{6a^2+5a-6}+\frac{2b-2ab}{3a^2-2a-3ab+2b}-\frac{a+6ab-3b}{9a^2-6a-9ab+6b}=\frac{2a}{3(a-b)}.$

46. $\frac{a^2+a+2}{a+a^2}-\frac{a}{1-a^2}+\frac{a+1}{1-a}=\frac{a^2+2}{a-a^3}.$

47. $\frac{2a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}.$

48. $\frac{a^2}{ab+b^2}+\frac{b^2}{a^2-ab}-\frac{2ab+b^2-a^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{ab}.$

49. $\frac{a^2+b^2}{4ab}-\frac{b^2}{a^2+ab}+\frac{b}{a-b}-\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a^4+3b^4}{4ab(a^2-b^2)}.$

50. $\frac{1}{a+2b}-\frac{2a-b}{a^2-ab-6b^2}+\frac{2}{a-3b}=\frac{1}{a-3b}.$

VIII. Vermischte Aufgaben.

1. $\left(\frac{a}{b}-\frac{ac-a}{bc}\right).bc=a.$

2. $\frac{4a^3-6a^2b}{3a^2b-6ab^2}\cdot\frac{3ac-6bc}{10a^4-15a^3b}=\frac{2c}{5a^2b}.$

3. $\frac{10a^2c^2-15c^4}{6bc^2-8c^4}:\frac{8a^2b-12bc^2}{9a^2b-12a^2c^2}=\frac{15a^2}{8b}.$

4. $(ab+a^2).\frac{a+ab+b^2}{a(a+b)}-(a+b).b=a.$

5. $\frac{a^2-2ab+b^2-c^2}{a-b+c}:(a-b-c)=1.$

6. $\left(\frac{a+x}{x}-\frac{2x}{x-a}\right).\frac{x-a}{a^2+x^2}=-\frac{1}{x}.$

7. $\left(\frac{4a^2-3a}{4}-\frac{5ac-12b}{20c}-\frac{3b}{5c}\right).\left(-\frac{b}{1-a}\right)=ab.$

8. $\left(\frac{49ax-15bc}{35bx}-\frac{2a-35b}{5b}+\frac{3c-56x}{7x}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a^2-ab}{a+b}.$

9. $\frac{2a^2-2ab-3ac+3bc}{a^2+ab}:\frac{2a^2+4ab-3ac-6bc}{a^2+2ab}=\frac{a-b}{a+b}.$

10. $\left(\frac{a-3b}{9}-\frac{3a-4b}{4}\right):\left(\frac{6ab-5a^2}{4b}-\frac{3a^2}{16b}\right)=\frac{4b}{9a}.$

11. $\left(\frac{9a^2 - 3b^2}{4ab} - \frac{a - 4b}{5b}\right) : \left(\frac{2a + b}{3a} - \frac{5b^2 - 3a^2}{16a^2}\right) = \frac{12a}{5b}$.

12. $\frac{10ab - 3b^2 + 10a - 3b}{15b^2 + 10ab^2 + 30b + 20ab} : \frac{10a - 3b}{45b + 30ab} + \frac{3}{b + 2} = 3$.

13. $\left(\frac{2a}{ab + 3a + 2b + 6} + \frac{a}{ab + 2b + a + 2}\right) : \frac{3b + 5}{b^2 + 4b + 3} + \frac{a^2 + 3a + 4}{a + 2} = a + 2$.

14. $\left(\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{2a^2 + a - 3}{6a^2 + 5a - 6} - \frac{2ab - 2b}{3a^2 - 2a - 3ab + 2b}\right) : \frac{a^2 + 6ab + 5b^2}{a^2 + 5ab - 5b^2} = \frac{2a - 1}{3a - 2}$.

15. $\left(\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} - \frac{10a^2 - 13ab - 3b^2}{10a^2 - 3ab - b^2} - \frac{2a^3 + ab^2 + ab + b^2}{2a^2 + ab - b^2}\right) : \frac{ab - b^2 - 2a + 2b}{2a - b} = 1$.

16. $\frac{\left[\frac{(a + b)^2}{4ab} - 1\right]\left[\frac{(a - b)^2}{4ab} + 1\right][(a + b)^2 - ab][(a - b)^2 + ab]}{[(a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2][(a - b)^3 + 3ab(a - b)]} = \frac{a^2 - b^2}{16a^2b^2}$.

17. $\left[\frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^3 + b^3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right] : \frac{(a + b)^2 - ab}{(a - b)^2 + ab} = \frac{a - b}{ab}$.

18. $\frac{\left[\frac{(a + b)^3}{3ab} - a - b\right]\left[\frac{(a - b)^3}{3ab} + a - b\right][(b - a)^3 - (b - a)(a^2 + ab + b^2)]}{\left[\frac{(a + b)^2}{4ab} - 1\right][(a + b)^2 - ab][(a + b)^3 - 3ab(a + b)]} = 1\frac{1}{3}$.

19. $\frac{(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)}{(a + b)(a + c)(b + c)} = 3$.

20. $\left(\frac{a - b}{5ab^2} + \frac{b - a}{10a^2b}\right) : \left(\frac{1}{10a^2b} - \frac{1}{5ab^2}\right) + a = b$.

IX. Rechnung mit Decimalbrüchen.*)

a. Die vier Rechnungsarten mit Decimalbrüchen.

1. $0{,}5 + 1{,}02 + 0{,}08 + 5{,}4 + 5 = 12$.
2. $24 - 2{,}4 - (3{,}008 - 5) - 3{,}092 = 20{,}5$.
3. $10 - [1{,}25 - (2{,}5 - (0{,}625 - 2) + 0{,}4) - 2{,}02] - 15{,}045 = 0$.
4. $8 - [2{,}06 - (0{,}2 - 2) - 0{,}008] + 4{,}008 - (0{,}06 - 2{,}004) - 0{,}1 = 10$.

*) Die Uebungen Nr. II. des ersten und Nr. III. des zweiten Abschnittes geben, wenn man für die darin vorkommenden allgemeinen Zahlen a, b, c Decimalbrüche setzt, noch recht gute Uebungen für das Rechnen mit Decimalbrüchen.

5. $0,139 . 28 + 42 . 0,002 + 6 . 0,004 - 0,05 . 20 = 3.$
6. $63,42 . 10 - (0,5 . 2,6 + 5,809 . 100 + 0,002 . 2,4 + 0,0095952 . 1000) = 42,4.$
7. $2 . [(0,69 - 0,25) . (2 - 0,75 + 1,5) . 2,04 - 0,46] - 0,008 . 2,1 = 4.$
8. $3,7 . (1 - 0,8) . 0,4 + (2,4 - 3,04) . (1 - 2,2) - 0,8 . [(3 - 2,4) . 0,2 - 4 . 0,01] = 1.$
9. $2,4 : 0,8 - 2,4 : 0,08 + 0,24 : 0,8 + 0,024 : 0,8 - 2,4 : 8 + 24 : 0,8 = 3,03.$
10. $2 : 0,1 - (0,8 : 10 - 0,2 : 0,02) + 36,48 : 8 - (2 - 4 : 0,05 + 0,6 : 1,25) = 112.$
11. $72,2 : 10 - 2 : [0,5 : (1,5 - 0,02)] + 2,125 : (1,75 - 0,5) = 3.$
12. $(0,8 - 2 : 0,04) . (6,4 : 8 - 8 : 6,4) - (0,4 : 10 + 0,21 : 10) = 20.$

b. Abgekürzte Multiplikation und Division.

1. $0,069687 . 0,45876 = 0,0319694.$
2. $3,04867 . 3,7819 = 11,52976.$
3. $0,04326721 . 0,035216244 = 0,0015237086.$
4. $1,2358607 . 0,0256073 = 0,031647056.$
5. $0,2810945 : 0,02634854 = 10,668315.$
6. $15,2035682 : 0,01128367 = 1347,39568.$
7. $4 : 2,1236824 = 1,883521.$
8. $3 : 0,862475 = 3,47836.$

c. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche.

1. $\frac{1}{2} = 0,5.$
2. $\frac{1}{4} = 0,25.$
3. $\frac{3}{4} = 0,75.$
4. $\frac{1}{5} = 0,\underline{2}.$
5. $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}.$
6. $\frac{4}{5} = 0,8.$
7. $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}.$
8. $\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}.$
9. $\frac{5}{8} = 0,625.$
10. $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}.$
11. $\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}.$
12. $\frac{1}{15} = 0,0\overline{6},$
13. $\frac{1}{20} = 0,05.$
14. $\frac{3476}{15625} = 0,222464.$
15. $\frac{13}{4000} = 0,00325.$
16. $\frac{11}{12} = 0,91\overline{6}.$
17. $\frac{17}{160000} = 0,00010625.$
18. $\frac{1}{2048000} = 0,00000048828125.$

d. Verwandlung von Decimalbrüchen in gewöhnliche Brüche.

1. $0,075 = \frac{3}{40}.$
2. $12,136 = 12\frac{17}{125}.$
3. $0,8125 = \frac{13}{16}.$
4. $0,\overline{12} = \frac{4}{33}.$
5. $0,\overline{18} = \frac{2}{11}.$
6. $0,0\overline{3} = \frac{1}{30}.$
7. $0,2\overline{46} = \frac{37}{150}.$
8. $0,\overline{7326} = \frac{74}{101}.$
9. $0,00\overline{123} = \frac{41}{33300}.$
10. $0,91\overline{6} = \frac{11}{12}.$

e. Zusammengesetzte Beispiele.*)

1. $2,4 + 1\frac{1}{5} - 0,06 - \frac{1}{8} - (0,01 + \frac{2}{5} + \frac{1}{200}) = 3.$

---

*) Gewöhnliche Brüche, deren Nenner nicht blos die Primfaktoren 2 und 5 enthalten, dürfen nicht in Decimalbrüche verwandelt werden, wenn man die richtigen Resultate erhalten will.

2. $4:0{,}2-\frac{1}{2}\,.\,1{,}3+0{,}3\,.\,6\frac{1}{4}-2{,}2:1\frac{2}{3}+\frac{19}{50}\,.\,0{,}25=20.$

3. $\left(\frac{7-3\frac{1}{2}}{1{,}5-\frac{1}{4}}+\frac{6\frac{1}{3}-4{,}4}{3{,}5}-\frac{5\frac{3}{5}}{2{,}25}-\frac{5{,}8}{42}\right).\,28=20.$

4. $\left(\frac{3{,}2}{10}-\frac{4:0{,}5}{1\frac{1}{2}+0{,}1}+\frac{2\frac{1}{8}}{1:0{,}05}-\frac{1-2{,}2}{0{,}2}+1\frac{2296}{4000}\right):3=1.$

5. $\left(\frac{0{,}9-\frac{3}{20}}{\frac{0{,}5}{2}-\frac{1}{5}}+\frac{6-0{,}4}{10:\frac{1}{0{,}16}-2{,}4}\right):\left(\frac{0{,}95+\frac{1}{4}}{0{,}35-\frac{1}{5}}-\frac{6\,.\,0{,}2-0{,}8}{1-0{,}9}\right)=2.$

6. $\frac{\frac{0{,}16}{4}\,.\,(0{,}1+2\frac{1}{50})}{4{,}8:8-7}:\frac{1}{400}-\frac{3\frac{1}{2}:10-10}{1-0{,}6}-\frac{4{,}125}{5}=18.$

7. $\left(\frac{3:4{,}8-8}{2-\frac{0{,}8}{1:0{,}5}}-\frac{1-0{,}2:4-2:0{,}4}{\frac{0{,}2}{8}\,.\,(4-3\frac{1}{10})}\right):\frac{2{,}5}{4}+\frac{\frac{3}{40}+0{,}07:4+0{,}025\,.\,\frac{1}{20}}{0{,}25}$
$=281.$

8. $0{,}\overline{189}\,.\,10{,}\overline{571428}=2.$

9. $\frac{0{,}433\overline{558}\,.\,16{,}1\overline{45}}{0{,}2\overline{037}\,.\,1{,}2\overline{27}}=1\frac{3}{4}.$

10. $\frac{0{,}109+0{,}3\overline{48}}{0{,}0\overline{21}}+\frac{1-2:(-0{,}2)}{1:(\frac{6}{7}-1)}=20.$

11. $\frac{0{,}2\overline{3}+\frac{5}{6}}{\frac{3}{5}:0{,}2}\,.\,\frac{3{,}\overline{45}\,.\,1\frac{1}{9}+0{,}02:\frac{2}{7}}{0{,}\overline{527}\,.\,\frac{263}{5500}}=32.$

12. $\frac{(0{,}\overline{3}+0{,}\overline{21})\,(3-3{,}5:3)}{(0{,}2\overline{9}-0{,}12\overline{9}):(2+3\,.\,0{,}75)}=25.$

X. Kettenbrüche.

1. Folgende Brüche in Kettenbrüche zu verwandeln:
   a) $\frac{3}{16}$; b) $\frac{25}{56}$; c) $\frac{121}{151}$; d) $\frac{115}{151}$; e) $\frac{32280}{36931}$; f) $\frac{6961}{9976}$.
   Resultate: Die Nenner der resp. Kettenbrüche sind:
   a) 5, 3; b) 2, 4, 6; c) 1, 4, 30; d) 1, 3, 5, 7; e) 1, 6, 1, 15, 1, 3, 1, 3, 2, 6; f) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

2. Verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche:
   $\alpha)\ \frac{bc+1}{(ab+1)c+a}$; $\beta)\ \frac{bcd+d+b}{abcd+cd+ad+ab+1}$;
   $\gamma)\ \frac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$;
   $\delta)\ \frac{48x^3+188x^2+252x+115}{48x^4+236x^3+464x^2+425x+151}$.
   Resultate: Die Nenner sind:
   α) a, b, c; β) a, b, c, d; γ) a, a + 1, a + 2, a + 3;
   δ) x + 1, 2x + 3, 4x + 5, 6x + 7.

3. Von folgenden Brüchen die Näherungswerthe anzugeben:
   a) $\frac{479}{6628}$; b) $\frac{55}{117}$; c) $\frac{573}{991}$; d) $\frac{251}{1313}$; e) 0,18573.
   Resultate: a) $\frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{6}{83}, \frac{43}{595}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{7}{15}, \frac{8}{17}$; c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}, \frac{37}{64}, \frac{85}{147}, \frac{122}{211}$; d) $\frac{1}{5}, \frac{4}{21}, \frac{13}{68}$; e) $\frac{1}{5}, \frac{2}{11}, \frac{3}{16}, \frac{5}{27}, \frac{8}{43}, \frac{13}{70}, \frac{164}{883}, \frac{341}{1836}, \frac{505}{2719}, \frac{1351}{7274}, \frac{8611}{46363}$.

4. Von folgenden Brüchen die Näherungswerthe anzugeben:

$\alpha)\ \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + x^2 - 1}$; $\beta)\ \frac{x^3 + 29x^2 + 246x + 596}{x^4 + 30x^3 + 276x^2 + 867x + 741}$.

Resultate: $\alpha)\ \frac{1}{x-1}, \frac{x+1}{x^2}, \frac{x^2}{x^3 - x^2 + x - 1}$;

$\beta)\ \frac{1}{x+1}, \frac{x+4}{x^2+5x+5}, \frac{x^2+13x+37}{x^3+14x^2+51x+46}$.

5. Welche Näherungswerthe giebt der periodische Kettenbruch, dessen Nenner sämmtlich gleich 1 sind.

Antw. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}$ u. s. w.

Sechster Abschnitt.

Von den Wurzeln, gebrochenen und negativen Potenzen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Radicirung (Wurzelausziehung).

§. 121.

Wenn $a^c = b$ ist, so nennt man a die cte **Wurzel** (**Radix**) aus b und bezeichnet dieselbe durch $a = \sqrt[c]{b}$. Das Zeichen $\sqrt{\ }$ heißt das **Wurzelzeichen**, c der **Wurzelexponent** und b der **Radikand**. Die Operation, durch welche die Zahl a gefunden wird, nennt man die **Wurzelausziehung** oder **Radicirung**. Wird in $a^c = b$ für a der Ausdruck $\sqrt[c]{b}$ gesetzt, so entsteht:

$$\left(\sqrt[c]{b}\right)^c = b;$$

d. h. **Eine Wurzel ist diejenige Zahl, welche mit dem Wurzelexponenten potenzirt, den Radikanten giebt.** Eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten 2 heißt eine **Quadratwurzel** z. B. $\sqrt[2]{a}$, man läßt dabei den Wurzelexponenten 2 fort, schreibt sie daher kürzer $\sqrt{a}$ und spricht dies aus: **Wurzel aus a.**

Ist der Wurzelexponent 3, dann heißt die Wurzel eine **Kubikwurzel.**

Beispiele. $\sqrt{16} = 4$, denn $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$.

$\sqrt[3]{-8} = -2$, denn $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$.

$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, denn $(\sqrt{\frac{9}{25}})^2 = (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$.

Anmerkung. 1) Da sich, wie dies im §. 65. Nr. 3. gezeigt ist, bei einer Potenz nicht Basis und Exponent vertauschen lassen, so muß die Potenzirung außer der Radicirung noch eine zweite indirekte Operation zulassen.

2) Bezeichnet man den Radikand mit R, den Wurzelexponent mit

e und die Wurzel mit W, so folgt, daß jede Radicirung richtig ausgeführt ist, wenn $W^e = R$ ist.

3) Hieraus folgt auch, daß eine Wurzel vorläufig nur dann eine Bedeutung haben kann, wenn der Wurzelexponent eine absolute ganze Zahl ist.

§. 122.

$\sqrt[b]{a^b} = a.$

d. h. **Wird eine Potenz durch ihren Exponenten radicirt, so erhält man die Basis.**

Beweis. $a^b = R$, $b = e$, und a soll $= W$ sein; dies ist der Fall, wenn $W^e = R$, also wenn $a^b = a^b$ ist, woraus die Richtigkeit hervorgeht.

§. 123.

Da gleiche Ausdrücke für einander gesetzt werden können, so muß auch, wenn $a = b$ ist, $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ sein, d. h.

Gleiches durch Gleiches radicirt, giebt Gleiches.

§. 124.

Die wichtigsten Beziehungen der Radicirung zu den übrigen Operationen sind folgende:

1) $\sqrt[c]{ab} = \sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b}$

d. h. **Ein Produkt wird durch eine Zahl radicirt, wenn man jeden Faktor durch dieselbe radicirt und die erhaltenen Wurzeln mit einander multiplicirt**; oder umgekehrt:

Zwei Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden mit einander multiplicirt, wenn man das Produkt der Radikanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radicirt.

Beweis. Hier ist $R = ab$, $c = e$ und $\sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b}$ soll $= W$ sein; dies ist der Fall, wenn $W^e = R$, also wenn

$$\left(\sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b}\right)^c = ab \text{ ist.}$$

Der linksstehende Ausdruck reducirt sich nach §. 67. Nr. 4. zuerst auf $\left(\sqrt[c]{a}\right)^c \cdot \left(\sqrt[c]{b}\right)^c$ und dann nach §. 121. auf a . b, woraus die Richtigkeit hervorgeht.

2) $\sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}$

d. h. **Ein Quotient (Bruch) wird durch eine Zahl radicirt, wenn man Dividendus (Zähler) und Divisor**

(Nenner) durch dieselbe radicirt und die erstere Wurzel durch die letztere dividirt; oder umgekehrt:

Zwei Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden durch einander dividirt, wenn man den Quotienten ihrer Radikanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radicirt.

Beweis. Es ist $\frac{a}{b} = R$, $c = e$, und $\frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}$ soll $= W$ sein; dies ist der Fall, wenn $W^e = R$, also wenn:

$$\left(\frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}\right)^c = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

Der links stehende Ausdruck reducirt sich nach §. 67. Nr. 5. zuerst auf $\frac{(\sqrt[c]{a})^c}{(\sqrt[c]{b})^c}$ und dann nach §. 121. auf $\frac{a}{b}$, woraus die Richtigkeit folgt.

3) $\sqrt[c]{a^b} = (\sqrt[c]{a})^b = a^{\frac{b}{c}}$ (wenn $\frac{b}{c}$ eine ganze Zahl ist) d. h. Eine Potenz wird durch eine Zahl radicirt, wenn man entweder die Basis durch die Zahl radicirt und die erhaltene Wurzel mit dem Exponenten potenzirt, oder indem man den Exponenten durch die Zahl dividirt und mit dem Quotienten (der aber kein Bruch sein darf) die Basis potenzirt; oder umgekehrt:

Eine Zahl wird mit einem Quotienten (der selbst eine ganze Zahl ist) potenzirt, wenn man die Zahl durch den Divisor radicirt und die erhaltene Wurzel mit dem Dividendus potenzirt, oder wenn man die Zahl erst mit dem Dividendus potenzirt und die erhaltene Potenz durch den Divisor radicirt.

Beweis des ersten Theiles: $\sqrt[c]{a^b} = (\sqrt[c]{a})^b$.

Hier ist $a^b = R$, $c = e$, und $(\sqrt[c]{a})^b$ soll $= W$ sein; dies ist der Fall, wenn $W^e = R$, also wenn:

$$\left[(\sqrt[c]{a})^b\right]^c = a^b \text{ ist.}$$

Nach §. 67. Nr. 3. kann man aber für die linke Seite dieser Gleichung zuerst $(\sqrt[c]{a})^{b.c}$, dann $(\sqrt[c]{a})^{c.b}$ und endlich $\left[(\sqrt[c]{a})^c\right]^b$ setzen.

Dieser Ausdruck reducirt sich aber nach §. 121. auf a^b, mithin ist der Satz richtig.

Beweis des zweiten Theils: $\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$.

Hier ist $R = a^b$, $e = c$, und W soll $= a^{\frac{b}{c}}$ sein; dies ist der Fall, wenn $W^e = R$, also wenn

$$\left(a^{\frac{b}{c}}\right)^c = a^b \text{ ist.}$$

Der links stehende Ausdruck reducirt sich nach §. 67. Nr. 3. auf $a^{\frac{b}{c}.c}$ oder auf a^b, woraus die Richtigkeit, jedoch nur für den Fall hervorgeht, daß $\frac{b}{c}$ eine ganze Zahl ist, da sonst $a^{\frac{b}{c}}$ noch gar keine Bedeutung haben würde.

4) $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b.c]{a} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}$

d. h. **Eine Wurzel wird durch eine Zahl radicirt, wenn man den Wurzelexponenten mit der Zahl multiplicirt und durch das erhaltene Produkt den Radikand radicirt, oder wenn man den Radikand durch die Zahl radicirt und die erhaltene Wurzel durch den Wurzelexponenten radicirt;** oder umgekehrt:

Eine Zahl wird durch ein Produkt radicirt, wenn man sie in beliebiger Ordnung erst durch den einen und die erhaltene Wurzel dann durch den anderen Faktor radicirt.

Beweis des ersten Theils: $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b.c]{a}$.

Hier ist $\sqrt[b]{a} = R$, $c = e$, und $\sqrt[b.c]{a}$ soll $= W$ sein; dies ist der Fall, wenn $W^e = R$, also wenn

$$\left(\sqrt[b.c]{a}\right)^c = \sqrt[b]{a} \text{ ist.}$$

Nach §. 122. bleibt der Werth einer Zahl unverändert, wenn man sie mit einer beliebigen Zahl potenzirt und die erhaltene Potenz durch dieselbe Zahl radicirt, also kann man für den links stehenden Ausdruck setzen $\sqrt[b]{\left[\left(\sqrt[b.c]{a}\right)^c\right]^b}$; dies verwandelt sich nach §. 67. Nr. 3. in $\sqrt[b]{\left(\sqrt[b.c]{a}\right)^{b.c}}$ und dies nach §. 122. in $\sqrt[b]{a}$, woraus die Richtigkeit folgt.

Beweis des anderen Theils: $\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[b.c]{a}$.

Vertauscht man im Beweis des ersten Theils überall b mit c, so ist die Beweisführung dieselbe.

5) $\sqrt[b]{a^c} = \sqrt[mb]{a^{mc}}$

d. h. **Der Werth einer Wurzel, deren Radikand eine Potenz ist, bleibt unverändert, wenn man Potenz- und Wurzelexponenten mit ein und derselben Zahl multiplicirt**; oder umgekehrt:

Der Werth einer Wurzel, deren Radikand eine Potenz ist, bleibt unverändert, wenn man Potenz- und Wurzelexponenten durch ein und dieselbe Zahl dividirt, wobei jedoch die Quotienten ganze Zahlen sein müssen.

Beweis. Hier ist $R = a^c$, $e = b$, und es soll $W = \sqrt[mb]{a^{mc}}$ sein; dies ist der Fall, wenn $W^e = R$, also wenn

$$\left(\sqrt[mb]{a^{mc}}\right)^b = a^c \text{ ist.}$$

Der links stehende Ausdruck vereinfacht sich nach Nr. 4. dieses §. auf $\sqrt[m]{a^{mc}}$ und dann nach §. 124. Nr. 3. auf a^c, woraus die Richtigkeit hervorgeht.

§. 125.

Durch wiederholte oder gemeinschaftliche Anwendung der Sätze des §. 124. erhält man noch:

1) $\sqrt[m]{abcd} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \cdot \sqrt[m]{d}$.

2) $\sqrt[m]{\frac{abc}{de}} = \frac{\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d} \cdot \sqrt[m]{e}}$.

3) $\sqrt[mnp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}$.

4) $\sqrt[\frac{mn}{pq}]{a} = \sqrt[mn]{a^{pq}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{(a^p)^q}}$ wenn $\frac{mn}{pq}$ eine ganze Zahl ist.

5) $a^{\frac{mn}{pq}} = \sqrt[pq]{a^{mn}} = \sqrt[p]{\sqrt[q]{(a^m)^n}}$

Zweites Kapitel.

Erweiterte Auffassung der Gesetze der Potenzirung und Radicirung. Specielle Zahlformen, welche sich daraus ergeben.

§. 126.

Bis jetzt hatte die Potenz nur für den Fall eine Bedeutung erhalten, wenn der Exponent eine absolute ganze Zahl ist, und

unter dieser Voraussetzung sind auch allein die Gesetze der Potenzen aufgestellt und bewiesen worden. Versteht man aber unter a^{p-q} allemal den Ausdruck $\frac{a^p}{a^q}$, auch für den Fall, wo p nicht größer als q ist, und unter $a^{\frac{p}{q}}$ den Ausdruck $\sqrt[q]{a^p}$, auch wenn $\frac{p}{q}$ keine ganze Zahl sein sollte, so wird hierdurch der Begriff der Potenz erweitert.

§. 127.

1) $a^0 = a^{p-p} = \frac{a^p}{a^p} = 1.$

d. h. Jede Zahl mit Null potenzirt giebt Eins.

2) $a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$

d. h. Jede Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Bruch, dessen Zähler Eins und dessen Nenner dieselbe Basis, aber mit positivem (absolutem) Exponenten ist.

§. 128.

Im Allgemeinen benennt man jede Potenz nach ihrem Exponenten, und zwar heißt eine Potenz, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, eine ganze Potenz; ist der Exponent negativ, eine negative Potenz, ist der Exponent ein Bruch, eine gebrochene Potenz, und wenn der Exponent Null ist, eine Null-Potenz.

§. 129.

Nun gelten die für ganze positive Potenzen im §. 67. aufgestellten und bewiesenen Gesetze auch für negative und gebrochene Potenzen, es ist nämlich:

1) $a^{-(p+q)} = a^{-p} \cdot a^{-q}.$

2) $a^{-(p-q)} = \frac{a^{-p}}{a^{-q}}.$

3) $(a^{-p})^q = a^{-pq}$ und $(a^{-p})^{-q} = a^{pq}.$

4) $(ab)^{-p} = a^{-p} \cdot b^{-p}.$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \frac{a^{-p}}{b^{-p}}.$

6) $a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}.$

7) $a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}}.$

8) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$.

9) $(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$.

10) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$.

Von der Richtigkeit dieser Sätze kann man sich leicht überzeugen, z. B.

$$a^{-(p+q)} = \frac{1}{a^{p+q}} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = a^{-p} \cdot a^{-q},$$

oder $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{qr}} = \sqrt[qs]{(a^{ps} \cdot a^{qr})}$

$= \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$ u. s. w.

§. 130.

Ist b eine ganze Zahl, so ist allemal

1) $(+a)^b = +a^b$

d. h. **Eine positive Zahl mit einer ganzen Zahl potenzirt giebt wieder eine positive Zahl.**

Beweis. Ein Produkt aus lauter positiven Faktoren ist stets positiv.

2) $(-a)^b = \begin{cases} +a^b, & \text{wenn b eine gerade} \\ -a^b, & \text{wenn b eine ungerade} \end{cases}$ Zahl ist.

d. h. **Eine negative Zahl mit einer ganzen Zahl potenzirt giebt ein positives Resultat, wenn der Exponent eine gerade Zahl, dagegen ein negatives Resultat, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist.**

Beweis. Nach §. 51. Nr. 1. ist ein Produkt aus lauter negativen Faktoren positiv, wenn die Anzahl der Faktoren gerade ist, dagegen negativ, wenn die Anzahl der Faktoren ungerade ist.

Beispiele. $(+2)^3 = +8$, $(+2)^4 = +16$.
$(-2)^3 = -8$, $(-2)^4 = +16$.

§. 131.

Jede ganze Potenz eines vollständig gehobenen Bruches ist jedesmal wieder ein solcher Bruch.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b}$ ein Bruch, welcher sich nicht mehr heben läßt, dann sind a und b relative Primzahlen. Nun ist aber

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots . (c\,\text{mal})}{b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots . (c\,\text{mal})}.$$

Zerlegt man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks in die Primfaktoren, so enthält der Zähler nur solche Primfaktoren, die in a vorkommen, der Nenner nur solche, die in b vorhanden sind; es kann daher kein Primfaktor des Nenners in den Zähler aufgehen, weil b und a relative Primzahlen sind; mithin ist $\left(\frac{a}{b}\right)^c$ ein gehobener Bruch.

§. 132.

1) Jede ganze Potenz einer Zahl, die größer als 1 ist, nimmt mit wachsendem Exponenten an Größe zu.

2) Jede ganze Potenz eines ächten Bruches nimmt mit wachsendem Exponenten an Größe ab.

Beweis. Es ist I. $(1+x)^2 > 1+2x$, vorausgesetzt, daß $x > 0$ ist.

Wenn aber $(1+x)^p > 1+px$ ist, dann muß auch

$$(1+x)^{p+1} > (1+px)(1+x)$$
$$> 1+px+x+px^2$$
$$> 1+(p+1)x+px^2, \text{ also um so mehr}$$
$$> 1+(p+1)x \text{ sein.}$$

Wendet man das sich hieraus ergebende Gesetz auf Ungleichung I an, so erhält man

$$(1+x)^3 > 1+3x$$
$$(1+x)^4 > 1+4x \text{ u. s. w., also allgemein:}$$
$$(1+x)^n > 1+nx.$$

Setzt man hierin $x = a-1$, so erhält man

$$a^n > 1+n(a-1).$$

Da nun $a > 1$ ist, so folgt hieraus die Richtigkeit der ersten Behauptung, daß a^n mit wachsendem n an Größe zunimmt.

Ist $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, so muß $\frac{b}{a}$ ein unächter Bruch, also größer als 1 sein, mithin nimmt $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ nach der ersten Behauptung mit wachsendem n an Größe zu, also $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{b}{a}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n}$ mit wachsendem n an Größe ab.

Hiernach ist es klar, daß $\left(\frac{1}{a}\right)^\infty = 0$ ist.

§. 133.

Eine Wurzel, deren Radikand eine absolute Zahl (übrigens ganz, gebrochen oder Null) ist, und deren Wurzelexponent eine ganze Zahl ist, heißt eine absolute Wurzel und stellt diejenige absolute Zahl vor, welche mit dem Wurzelexponenten potenzirt, den Radikanden giebt.

§. 134.

1) Die absolute Wurzel aus einer ganzen Zahl, z. B. $\sqrt[n]{a}$ stellt nicht immer, sondern nur dann wieder eine ganze Zahl vor, wenn a eine der Potenzen 1^n, 2^n, 3^n, ... k^n, $(k+1)^n$ .... ist. Ist dies nicht der Fall, d. h. stellt $\sqrt[n]{a}$ keine ganze Zahl vor, so stellt sie auch keine gebrochene Zahl vor, denn jede ganze Potenz einer gebrochenen Zahl ist nach §. 131. wieder eine gebrochene Zahl und kann daher nie gleich der ganzen Zahl a sein.

2) Die absolute Wurzel aus einer gebrochenen Zahl, z. B. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ kann nie eine ganze Zahl sein, weil jede ganze Zahl, mit einer ganzen Zahl potenzirt, wieder eine ganze Zahl giebt; aber sie wird auch nicht immer wieder eine gebrochene Zahl vorstellen, sondern nur dann, wenn $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$, beide zugleich, ganze Zahlen sind, da $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ist.

§. 135.

Eine absolute Wurzel, deren Werth sich weder als ganze noch als gebrochene Zahl angeben läßt, nennt man eine irrationale Wurzel; im entgegengesetzten Falle heißt die absolute Wurzel rational.

§. 136.

Jede irrationale Wurzel, z. B. $\sqrt[n]{a}$, hat einen bestimmten endlichen Werth, der sich zwar nicht genau angeben läßt, welchem man sich aber durch Paare von gebrochenen Zahlen, zwischen denen er liegen muß, beliebig nähern kann.

Beweis. Man setze $a = \frac{ap^n}{p^n}$, wobei p eine beliebige ganze Zahl vorstellt, ferner denke man sich alle Zahlen der natürlichen Zahlenreihe mit n potenzirt, z. B.

$1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots . k^n, (k+1)^n \ldots .$

so muß ap^n nothwendig zwischen zwei auf einander folgenden dieser Potenzen, etwa zwischen k^n und $(k+1)^n$ liegen, so daß alsdann

$k^n < ap^n$ und $(k+1)^n > ap^n$ ist.

Dann muß auch

$\frac{k^n}{p^n} < a$ und $\frac{(k+1)^n}{p^n} > a$ oder,

auf beiden Seiten durch n radicirt,

$\frac{k}{p} < \sqrt[n]{a}$ und $\frac{k+1}{p} > \sqrt[n]{a}$ sein.

Zwischen diesen beiden gebrochenen Zahlen $\frac{k}{p}$ und $\frac{k+1}{p}$, deren Unterschied $\frac{1}{p}$ ist, wird daher der Werth der irrationalen Wurzel liegen und sich von jedem derselben um weniger als $\frac{1}{p}$ unterscheiden. Da nun p ganz beliebig angenommen wurde, so lassen sich unendlich viel Paare solcher gebrochenen Zahlen angeben, welche in immer größeren und größeren Zahlen ausgedrückt, sich dem durch $\sqrt[n]{a}$ vorgestellten Werthe um so mehr nähern, je größer p genommen wird.

§. 137.

Jede auf diese Weise nur in der Idee existirende gebrochene Zahl, der man sich zwar beliebig nähern, welche selbst aber nie wirklich dargestellt werden kann, heißt eine **Irrationalzahl**; und je zwei Brüche, zwischen welchen sie liegen muß, heißen ihre **Näherungswerthe**. Jede wirkliche ganze oder gebrochene Zahl nennt man dagegen auch eine **rationale Zahl**.

§. 138.

Jede absolute Wurzel nähert sich mit wachsendem Wurzelexponenten immer mehr der 1.

Beweis. Setzt man in die im Beweis des §. 132. entwickelte Formel $(1+x)^n > 1 + nx$ statt x den Werth $\frac{a-1}{n}$, so erhält man

$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n > 1 + a - 1$ oder

$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n > a$, daher ist

$\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n}$, und hieraus folgt, daß $\sqrt[n]{a}$ sich mit wachsendem n immer mehr der 1 nähert.

Dasselbe gilt auch, wenn $a < 1$ ist.

§. 139.

Jede positive Zahl b läßt sich allemal als Potenz einer anderen positiven Zahl a darstellen.

Beweis. Es sei $a^{n+\frac{1}{q}} > b$ und $a^n < b$, dann liegt b zwischen $a^{n+\frac{1}{q}}$ und a^n; der Unterschied

$$a^{n+\frac{1}{q}} - a^n = a^n\left(a^{\frac{1}{q}} - 1\right)$$
$$= a^n\left(\sqrt[q]{a} - 1\right)$$

läßt sich, da nach dem Vorhergehenden $\sqrt[q]{a} - 1 < \frac{a-1}{q}$ ist, so klein machen, als man nur will, d. h. man kann einen solchen Werth von q finden, daß $a^{n+\frac{1}{q}} = b$ wird.

§. 140.

Eine Wurzel, deren Radikand eine beliebige reelle Zahl (also eine positive ganze oder gebrochene, negative ganze oder gebrochene Zahl, oder Null, oder eine unendlich große positive oder negative Zahl), und deren Wurzelexponent eine wirkliche ganze Zahl ist, heißt eine allgemeine Wurzel, und es wird darunter jeder Ausdruck verstanden, der mit dem Wurzelexponenten potenzirt den Radikanden giebt.

§. 141.

Jede allgemeine Wurzel mit geradem Exponenten aus einer positiven Zahl hat einen doppelten Werth, indem sie sowohl eine positive, als auch eine negative Zahl vorstellen kann*) d. h.:

*) In Bezug auf das doppelte Zeichen einer Wurzel möge bemerkt werden, daß man nur dann ein doppeltes Zeichen erhält, wenn die Art der Entstehung des Radikanden unbekannt ist. So kann z. B. $a^2 - 2ab + b^2$ entstanden sein aus $(a-b) \cdot (a-b)$ oder aus $(b-a) \cdot (b-a)$, es ist also $\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)} = a - b$ oder auch $= b - a$, d. h. $-(a-b)$,

Es ist $\sqrt[2n]{+a} = +\sqrt[2n]{a}$ und auch $= -\sqrt[2n]{a}$.

Beweis. $\sqrt[2n]{+a}$ ist diejenige Zahl, welche mit 2n potenzirt $+a$ giebt; nun ist aber nach §. 130. sowohl $\left(+\sqrt[2n]{a}\right)^{2n}$, als auch $\left(-\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = a$ $= +a$, folglich ist unter $\sqrt[2n]{+a}$ sowohl $+\sqrt[2n]{a}$, als auch $-\sqrt[2n]{a}$ zu denken, welche beiden Resultate man in der Regel zusammenfaßt, und daher kürzer schreibt: $\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$.

§. 142.

Jede Wurzel mit geradem Exponenten aus einer negativen Zahl, z. B. $\sqrt[2n]{-a}$ stellt weder eine positive, noch eine negative Zahl, noch Null, noch eine unendlich große Zahl, also überhaupt keine der reellen Zahlen vor.

Beweis. Jede reelle Zahl, mit einer geraden Zahl potenzirt, giebt nach §. 130. entweder ein positives Resultat oder Null, nie aber etwas Negatives.

§. 143.

Die gerade Wurzel aus einer negativen Zahl, z. B. $\sqrt[2n]{-a}$ bildet daher, weil sie keiner der reellen Zahlformen entspricht, eine eigenthümliche neue Zahlform, welche, im Gegensatz zu jenen, eine **imaginäre Zahl** genannt wird, und an welcher nichts als die Eigenschaft festgehalten wird, daß $(\sqrt[2n]{-a})^{2n} = -a$ ist.

§. 144.

Jede allgemeine Wurzel mit ungeradem Wurzelexponenten aus einer positiven Zahl ist positiv, aus einer negativen Zahl negativ.

Beweis. Nur eine positive Zahl mit einer ungeraden Zahl potenzirt, giebt ein positives, und nur eine negative Zahl mit einer ungeraden Zahl potenzirt, giebt ein negatives Resultat.

So ist z. B. $\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$ und
$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

---

mithin ist es bequem zu setzen $\sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)} = \pm(a - b)$. Man darf aber nicht $\sqrt{(a-b)^2} = \pm(a-b)$, sondern nur $= a - b$ setzen. So ist auch $\sqrt{(+a)^2}$ nur $= +a$ und $\sqrt{(-a^2)}$ nur $= -a$.

§. 145.

Diese Resultate sind jedoch keinesweges als allgemein und erschöpfend anzusehen, vielmehr zeigt eine weitere, nicht in diese Grenzen gehörende, Untersuchung, daß jede allgemeine Wurzel außer den hier angegebenen oft noch viele andere Werthe hat, und zwar stets so viel, wie der Wurzelexponent Einheiten hat, von denen jedoch alle bis auf die hier angeführten in imaginärer Form erscheinen.

So ist z. B. $\sqrt[3]{1} = 1$, aber auch $= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $= \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; denn alle drei Ausdrücke geben mit 3 potenzirt die Zahl 1, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Drittes Kapitel.

Das Quadriren und Cubiren, so wie das Ausziehen von Quadrat- und Cubikwurzeln aus algebraischen Summen.

§. 146.

Das Quadrat einer zweigliedrigen Summe ist gleich dem Quadrat des ersten Gliedes plus dem doppelten Produkt beider Glieder plus dem Quadrat des zweiten Gliedes; denn $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Nach dieser Formel ist es leicht, eine zweigliedrige Summe sogleich zu quadriren, z. B.

$$(-3a^2b + 2ab^2)^2 = (-3a^2b)^2 + 2 \,.\, (-3a^2b) \,.\, (+2ab^2) + (2ab^2)^2 = +9a^4b^2 - 12a^3b^3 + 4a^2b^4.$$

In obiger Formel ist auch die andere:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ mit enthalten.

§. 147.

Soll eine Summe von mehr als zwei Summanden quadrirt werden, so kann dies dadurch nach derselben Formel geschehen, daß man die Summe vorläufig als aus zwei Summanden bestehend betrachtet, z. B.

$$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2.$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2.$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2.$$

Eine mehrgliedrige algebraische Summe kann nun nach dieser Formel sehr leicht quadrirt werden, doch ist es dabei vortheilhaft,

nicht gleich alle Klammern aufzulösen, sondern die Rechnung nur erst anzudeuten, z. B.

$$(3a^2 + 2ab + c^2 - 3d^2)^2 = 9a^4 + 12a^3b + 4a^2b^2 + 2(3a^2 + 2ab)c^2 + c^4 + 2(3a^2 + 2ab + c^2).(-3d^2) + 9d^4$$
$$= 9a^4 + 12a^3b + 4a^2b^2 + 6a^2c^2 + 4abc^2 + c^4 - 18a^2d^2 - 12abd^2 - 6c^2d^2 + 9d^4.$$

§. 148.

Der Cubus einer zweigliedrigen Summe ist gleich dem Cubus des ersten Gliedes plus dem dreifachen Produkt aus dem Quadrat des ersten Gliedes mal dem zweiten Gliede, plus dem dreifachen Produkt aus dem ersten Gliede mal dem Quadrat des zweiten Gliedes, plus dem Cubus des zweiten Gliedes; denn:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Nach dieser Formel ist es leicht, eine zweigliedrige algebraische Summe zu cubiren; z. B.

$$(-2a^2 + 3bc)^3 = (-2a^2)^3 + 3(-2a^2)^2.(3bc) + 3(-2a^2).(3bc)^2 + (3bc)^3$$
$$= -8a^6 + 36a^4bc - 54a^2b^2c^2 + 27b^3c^3.$$

In obiger Formel ist auch die andere:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ mit enthalten.

§. 149.

Soll eine Summe von mehr als zwei Summanden cubirt werden, so kann dies nach derselben Formel dadurch geschehen, daß man die Summe vorläufig als aus zwei Summanden bestehend betrachtet, z. B.

$$(a + b + c + d)^3 = (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)^2.d + 3(a + b + c).d^2 + d^3$$
$$= (a + b)^3 + 3(a + b)^2.c + 3(a + b).c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b + c)^2d + 3(a + b + c)d^2 + d^3.$$

Eine mehrgliedrige algebraische Summe kann nach dieser Formel sehr leicht cubirt werden, doch ist es praktisch bequem, die Rechnung erst nur anzudeuten, und dann erst die Klammern aufzulösen und die Vereinigung vorzunehmen, z. B.

$$(3a^2b - 2ab - c^2)^3 = 27a^6b^3 - 54a^5b^3 + 36a^4b^3 - 8a^3b^3 + 3(3a^2b - 2ab)^2 . (-c^2) + 3(3a^2b - 2ab) . c^4 - c^6$$
$$= 27a^6b^3 - 54a^5b^3 + 36a^4b^3 - 8a^3b^3 - 27a^4b^2c^2 + 36a^3b^2c^2 - 12a^2b^2c^2 + 9a^2bc^4 - 6abc^4 - c^6.$$

§. 150.

Da $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$, oder $= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ ist, so muß auch umgekehrt:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2} = \pm (a + b + c)$$

sein; oder nach fallenden Potenzen von a geordnet:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2} = \pm (a + b + c).$$

Will man daher aus einer algebraischen Summe die Quadratwurzel ziehen, so ordne man dieselbe erst nach Potenzen eines Buchstabens und bestimme dann das erste Glied der Wurzel dadurch, daß man aus dem ersten Gliede des Radikanden die Quadratwurzel nimmt. Dann subtrahire man das Quadrat dieses ersten Gliedes vom Radikanden. Betrachtet man den übrig bleibenden Rest:

$$2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2,$$

so erkennt man leicht, daß man das zweite Glied b der Wurzel findet, wenn man mit dem doppelten ersten Gliede 2a in das erste Glied 2ab des geordneten Restes dividirt. Multiplicirt man dann mit diesem zweiten Gliede b den Divisor 2a, quadrirt das gefundene zweite Glied b und subtrahirt die Summe $2ab + b^2$ vom vorigen Reste, so bleibt als neuer Rest:

$$2ac + 2bc + c^2 = (2a + 2b)c + c^2.$$

Hieraus ist wieder leicht ersichtlich, daß man das Glied c der Wurzel findet, wenn man mit dem doppelten Produkt der beiden ersten Glieder, nämlich mit $2a + 2b$ in den neuen Rest dividirt. Multiplicirt man endlich mit diesem dritten Gliede c den Divisor $2a + 2b$, quadrirt das dritte Glied c und subtrahirt die Summe $2ac + 2bc + c^2$ vom Rest, so bleibt als neuer Rest Null. Sollte die gegebene Summe noch mehr Glieder haben, so fahre man so lange auf dieselbe Art fort, bis ein Rest gleich Null übrig bleibt. Ist dies der Fall, so ist die Rechnung beendet, und die verlangte Quadratwurzel war rational.

Im Praktischen erhält die Rechnung folgende Gestalt:

$$\sqrt{\tfrac{9}{4} + 6x - 17x^2 - 28x^3 + 49x^4} = \pm\left(\tfrac{3}{2} + 2x - 7x^2\right)$$

$$\begin{array}{r|l}
\frac{9}{4} & \\
\hline
3 & 6x - 17x^2 - 28x^3 + 49x^4 \\
 & 6x + 4x^2 \\
\hline
3 + 4x & -21x^2 - 28x^3 + 49x^4 \\
 & -21x^2 - 28x^3 + 49x^4 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

Ist aber die verlangte Quadratwurzel nicht rational, so kann man natürlich auf keinen Rest kommen, welcher gleich Null ist; dann erhält man durch obiges Verfahren eine unendliche Reihe. Die Entscheidung, ob eine solche Reihe zur Berechnung einer Wurzel brauchbar ist oder nicht, überschreitet die Grenzen dieses Lehrbuchs.

z. B. $\sqrt{1-x} = \pm\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \ldots.\right)$

$$\begin{array}{r|l}
1 & \\
\hline
2 & -x \\
 & -x + \frac{x^2}{4} \\
\hline
2 - x & -\frac{x^2}{4} \\
 & -\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64} \\
\hline
2 - x - \frac{x^2}{4} & -\frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64} \\
 & -\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{64} + \frac{x^6}{256} \\
\hline
2 - x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} & -\frac{5x^4}{64} - \frac{x^5}{64} - \frac{x^6}{256} \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

Diese für $\sqrt{1-x}$ gefundene Reihe gilt nur für $x < 1$, und ebenso die Reihe für $\sqrt{1+x}$, welche aus der vorhergehenden entsteht, wenn man $-x$ für x setzt.

§. 151.

Da $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c$
$+ 3(a+b)c^2 + c^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3$
$+ 3b^2c + 3bc^2 + 6abc,$

oder geordnet nach fallenden Potenzen von a,

$= a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + b^3$
$+ 3b^2c + 3bc^2 + c^3$ ist, so ist auch umgekehrt:

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3}$$
$$= a + b + c.$$

Will man daher aus einer algebraischen Summe die Cubikwurzel ziehen, so ordne man dieselbe erst nach Potenzen eines Buchstabens und bestimme dann das erste Glied der Wurzel dadurch, daß man aus dem ersten Gliede des Radikanden die Cubikwurzel nimmt. Dann subtrahire man den Cubus dieses ersten Gliedes vom Radikanden. Betrachtet man den übrig bleibenden Rest:

$$3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3,$$

so erkennt man, daß man das zweite Glied b der Wurzel findet, wenn man mit dem dreifachen Quadrat des ersten Gliedes a, nämlich mit $3a^2$, in das erste Glied des geordneten Restes dividirt.

Dann multiplicire man mit diesem zweiten Gliede b den Divisor $3a^2$, quadrire dies zweite Glied b, multiplicire das Quadrat mit dem dreifachen ersten Gliede, cubire ferner das zweite Glied b, und subtrahire die dadurch erhaltene Summe $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ vom Rest, so bleibt als neuer Rest:

$$3a^2c + 3ac^2 + 6abc + 3b^2c + 3bc^2 + c^3.$$

Hieraus ist wieder leicht zu erkennen, daß man das dritte Glied c der Wurzel findet, wenn man mit dem dreifachen Quadrat der Summe der beiden gefundenen ersten Glieder, also mit $3a^2 + 6ab + 3b^2$ in den geordneten Rest dividirt.

Dann multiplicire man das gefundene dritte Glied c mit dem Divisor $3a^2 + 6ab + 3b^2$, quadrire es und multiplicire das Quadrat mit der dreifachen Summe der beiden ersten Glieder, cubire endlich das dritte Glied selbst und subtrahire die dadurch entstandene Summe

$$3a^2c + 3ac^2 + 6abc + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \text{ vom Rest.}$$

Sollte die gegebene Summe noch mehr Glieder haben, so fahre man so lange auf dieselbe Art fort, bis ein Rest gleich Null übrig bleibt. Ist dies der Fall, so ist die Rechnung beendet, und die Cubikwurzel war rational.

Im Praktischen erhält die Rechnung folgende Gestalt:

$$\text{Wurzel} = 2x^2 + 4cx - 3c^2$$

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt[3]{8x^6 + 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6} \\
 & 8x^6 \\ \hline
12x^4 & 48cx^5 + 60c^2x^4 - 80c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6 \\
 & 48cx^5 + 96c^2x^4 + 64c^3x^3 \\ \hline
 & -36c^2x^4 - 144c^3x^3 - 90c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6 \\
12x^4 + 48cx^3 + 48c^2x^2 & -36c^2x^4 - 144c^3x^3 - 144c^4x^2 + 108c^5x - 27c^6 \\
 & \qquad\qquad + 54c^4x^2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Ist aber die verlangte Cubikwurzel nicht rational, so kann man natürlich auf keinen Rest kommen, welcher gleich Null ist; dann erhält man durch obiges Verfahren eine unendliche Reihe, die man auf mehr oder weniger Glieder berechnen kann,

z. B. $\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81} - \ldots.$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
3 & -x \\
 & -x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{27} \\ \hline
 & -\frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27} \\
3 - 2x + \frac{x^2}{3} & -\frac{x^2}{3} + \frac{2x^3}{9} - \frac{x^4}{27} + \frac{x^4}{27} - \frac{x^5}{81} - \frac{x^6}{729} \\ \hline
3 - 2x - \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{9} + \frac{x^4}{27} & -\frac{5x^3}{27} + \frac{x^5}{81} + \frac{x^6}{729} \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

Auch diese für $\sqrt[3]{1-x}$ gefundene Reihe gilt nur für $x < 1$. (Vgl. §. 150.)

Viertes Kapitel.

Das Quadriren und Cubiren, sowie das Ausziehen von Quadrat- und Cubik-Wurzeln aus ganzen Zahlen, gewöhnlichen und Decimal-Brüchen.

§. 152.

Aus einer ganzen Zahl die Quadratwurzel ziehen, heißt diejenige Zahl finden, deren Quadrat gleich der gegebenen Zahl ist. Giebt es eine ganze Zahl von dieser Eigenschaft, so heißt diese die genaue Quadratwurzel der gegebenen Zahl und letztere eine vollkommene Quadratzahl. Giebt es dagegen keine ganze Zahl, deren Quadrat gleich der gegebenen Zahl ist, so muß

der Werth der Quadratwurzel zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen liegen, von denen die eine die **nächst kleinere**, die andere die **nächst größere Quadratwurzel** der gegebenen Zahl genannt wird, welche letztere in diesem Falle eine **unvollkommene Quadratzahl** heißt.

So ist z. B. $\sqrt{9} = \pm 3$, also ± 3 die genaue Quadratwurzel von 9 und 9 eine vollkommene Quadratzahl; dagegen liegt $\sqrt{5}$ zwischen ± 2 und ± 3, folglich ist ± 2 die nächst kleinere und ± 3 die nächst größere Quadratwurzel von 5, und 5 selbst eine unvollkommene Quadratzahl.

§. 153.

Das Quadrat einer $n$ziffrigen Zahl hat wenigstens $2n - 1$, höchstens $2n$ Ziffern.

Beweis. Jede $n$ziffrige Zahl ist größer als 10^{n-1}, aber kleiner als 10^n, also ist das Quadrat einer $n$ziffrigen Zahl größer als 10^{2n-2}, und kleiner als 10^{2n}. Da nun 10^{2n-2} die kleinste $2n - 2 + 1$, d. h. die kleinste $2n - 1$ziffrige Zahl ist (sie besteht nämlich aus 1 mit $2n - 2$ Nullen), so hat das Quadrat, da es größer sein muß, mindestens $2n - 1$ Ziffern; und da 10^{2n} die kleinste $2n + 1$ziffrige Zahl ist, das Quadrat der $n$ziffrigen Zahl aber noch kleiner sein soll, so kann es höchstens $2n$ Ziffern haben.

§. 154.

Hat daher umgekehrt eine numerische Zahl $2n$ oder $2n - 1$ Ziffern, so ist ihre genaue oder nächst kleinere Quadratwurzel $n$ziffrig. So ist z. B. die Quadratwurzel jeder 6 und jeder 5ziffrigen Zahl 3ziffrig.

§. 155.

Jede numerische Zahl kann als eine nach Potenzen von 10 geordnete Summe betrachtet und geschrieben werden, z. B. $8746 = 8 . 10^3 + 7 . 10^2 + 4 . 10 + 6$.

Wendet man auf diese Summe die Formel des §. 147. an, so erhält man:

$$\begin{aligned}(8746)^2 = &(8 . 10^3)^2 \\ &+ 2 . 8 . 10^3 . 7 . 10^2 \\ &+ (7 . 10^2)^2 \\ &+ 2 . (8 . 10^3 + 7 . 10^2) . 4 . 10 \\ &+ (4 . 10)^2 \\ &+ 2 . (8 . 10^3 + 7 . 10^2 + 4 . 10) . 6 \\ &+ 6^2.\end{aligned}$$

Führt man die auf diese Art angedeuteten Rechnungen aus und schreibt die Summanden so unter einander, wie dies bei der Addition numerischer Zahlen gebräuchlich ist, so erhält man:

$(8746)^2 =$ 64	00	00	00	
11	20	00	00	
	49	00	00	
	69	60	00	
		16	00	
	10	48	80	
			36	
76	49	25	16	

oder die bei der Addition nicht in Betracht kommenden Nullen weglassend:

64			
11	2		
	49		
	69	6	
		16	
	10	48	8
			36
76	49	25	16

Hieraus ergiebt sich folgende Regel für das Quadriren einer mehrziffrigen numerischen Zahl:

Man nehme das Quadrat der ersten Ziffer links, dann das doppelte Produkt der beiden ersten Ziffern, dann das Quadrat der zweiten Ziffer, dann das doppelte Produkt der beiden ersten Ziffern (als eine Zahl gelesen) mal der dritten Ziffer, dann das Quadrat der dritten Ziffer u. s. w., schreibe alle auf diese Weise erhaltenen Theile des Quadrats so unter einander, daß jeder folgende um eine Stelle rechts herausgerückt wird, und addire sie dann, so ist die Summe das Quadrat der gegebenen mehrziffrigen Zahl.

§. 156.

Theilt man die auf diese Weise erhaltene Quadratzahl von der rechten zur linken Hand in Abtheilungen von zwei zu zwei Ziffern ein, wie solches im obigen Beispiele durch senkrechte Striche geschehen ist, so macht man folgende Bemerkungen:

1) Die Zahl der Klassen ist nach §. 154. gleich der Anzahl der Ziffern in der zugehörigen Quadratwurzel.

2) Das Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel ist in der ersten Abtheilung links enthalten.

3) Das doppelte Produkt der beiden ersten Ziffern reicht bis hinter die erste Stelle, das Quadrat der zweiten Ziffer der Wurzel bis ans Ende der zweiten Abtheilung u. s. w.

Auf diese Bemerkungen gründet sich folgende Regel für das Finden der genauen oder der nächst kleineren Quadratwurzel aus einer mehrziffrigen numerischen Zahl:

Man theile die gegebene Zahl von der rechten zur linken Hand in Abtheilungen von zwei und zwei Ziffern, so ist durch die Anzahl dieser Abtheilungen die Anzahl der Ziffern in der Wurzel bestimmt, und die Rechnung zerfällt in ebensoviel Abschnitte.

1) Man wähle als erste Ziffer der Wurzel die größte Zahl, deren Quadrat gleich oder kleiner ist, als die erste Abtheilung links, subtrahire dies Quadrat (in unten stehendem Beispiele 64) von der ersten Abtheilung (76) und nehme zu dem Rest (12) die folgende Abtheilung (49) herunter.

2) Nun bestimme man die folgende Ziffer (7) der Wurzel so, daß die Summe aus dem doppelten Produkt beider Ziffern (112) und dem Quadrat der zweiten Ziffer (49), wenn letzteres bei der Addition um eine Stelle rechts herausgerückt wird, gerade noch von dem durch die folgende Abtheilung vermehrten Reste subtrahirt werden kann. Nach ausgeführter Subtraktion nehme man zu dem Rest (80) wieder die folgende Abtheilung herunter.

3) Man setze nun die Rechnung ganz wie in Nr. 2. fort, nur, daß jetzt mit den bereits erhaltenen Ziffern der Wurzel (als eine Zahl gelesen) ganz so verfahren wird, wie vorhin mit der ersten Ziffer.

Geht diese fortgesetzte Rechnung auf, so ist die gegebene Zahl das vollkommene Quadrat der gefundenen, folglich letztere die genaue Quadratwurzel der gegebenen Zahl. Geht die Rechnung aber nicht auf, sondern bleibt bei der letzten Subtraktion noch ein Rest, so ist die gefundene Zahl die nächst kleinere Quadratwurzel der gegebenen.

$$\sqrt{76|49|25|16} = \pm 8746$$

```
64
----
1249
1169
----
  8025
  6976
  ------
  104916
  104916
  ------
       0
```

Anmerkung. 1) Um die verlangte Rechnung mit einiger Geläufigkeit ausführen zu können, muß man die Quadrate aller einziffrigen Zahlen im Gedächtniß haben, nämlich $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$.

2) Das Bestimmen jeder folgenden Ziffer der Wurzel kann im Allgemeinen nur durch Probiren geschehen, doch läßt sich dies Probiren dadurch einschränken, daß man die bereits gefundenen Ziffern (als eine Zahl gelesen) mit 2 multiplicirt und damit in den durch die folgende Abtheilung vermehrten Rest, jedoch mit Ausnahme der letzten Ziffer, dividirt. Hierdurch ergiebt sich zwar die folgende Ziffer häufig zu groß, doch giebt sich der dadurch gemachte Fehler sogleich in der folgenden Rechnung kund und kann daher leicht verbessert werden. Schlimmer wäre es, wenn man die folgende Ziffer zu klein wählte, weil sich der Fehler erst später und auf eine weniger bemerkliche Art zeigt. Vor diesem Fehler hat man sich daher besonders zu hüten.

§. 157.

Ist a eine unvollkommene Quadratzahl, und man nimmt statt $\sqrt{a}$, deren Werth nicht genau angegeben werden kann, die nächst kleinere Quadratwurzel von a, so ist der Fehler, den man dabei begeht, doch immer kleiner als 1; denn der Unterschied zwischen der nächst kleineren und der nächst größeren Quadratwurzel beträgt 1, und zwischen beiden muß der Werth von $\sqrt{a}$ liegen.

§. 158.

Für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einem Decimalbruch ergiebt sich folgende Regel:

Hat der Decimalbruch nicht bereits eine gerade Anzahl von Decimalstellen, so bringe man ihn durch Anhängung von Nullen darauf, wodurch er die Form $\frac{a}{10^{2n}}$, also sein Nenner eine rationale Form erhält, ziehe dann aus ihm, ohne das Komma zu berücksichtigen, also aus seinem Zähler, wie aus einer ganzen Zahl die genaue oder nächst kleinere Quadratwurzel, und gebe derselben halb so viel Decimalstellen, wie der Decimalbruch zuletzt hatte, wodurch auch der Nenner, mithin nach §. 124. Nr. 2. der ganze Bruch, durch 2 radicirt worden ist.

Das praktische Geschäft, wobei die in der Anmerkung Nr. 2. des §. 156. angegebenen Divisoren mit angeführt sind, sieht dann folgendermaßen aus:

$$\sqrt{0{,}02|36|80} = \pm\, 0{,}153\ldots$$

```
     1
   -----
   2| 136
    | 125
   -------
  30| 1180
    |  909
   -------
       271
```

Nennt man die gefundenen Stellen der Wurzel a, den Fehler, welcher in Bezug auf a nur sehr klein sein kann, x, den Rest d, dann muß

$$2ax + x^2 = d, \text{ also}$$

$$x = \frac{d}{2a + x} \text{ sein.}$$

Führt man diese Division nach der abgekürzten Methode aus und berücksichtigt dabei die erste für x sich ergebende Stelle, so erhält man im Allgemeinen noch eben so viel richtige Stellen wie a hat.

In obigem Beispiel ist $x = \frac{271}{306 + x} = \frac{271}{306,8} = 0,883$, also, da sich das Komma auf die letzte Stelle von a bezieht,

$\sqrt{0,02368} = 0,153883\ldots$, wobei noch die letzte Stelle richtig ist.

§. 159.

1) Ist der Zähler a des Decimalbruchs eine unvollkommene Quadratzahl, und man nimmt statt des wahren Werthes von $\sqrt{a}$ die nächst kleinere Quadratwurzel, welche durch k bezeichnet werden mag, so ist der Fehler, den man dadurch begeht, kleiner als eine Einheit der niedrigsten Ordnung des als Resultat erhaltenen Decimalbruchs; denn nach §. 157. ist $\sqrt{a} - k < 1$, folglich $\frac{\sqrt{a}}{10^n} - \frac{k}{10^n} < \frac{1}{10^n}$.

2) Da man nun jedem Decimalbruch, sowie auch jeder ganzen Zahl, beliebig viel Nullen als Decimalstellen anhängen kann, und mit jedem Paare angehängter Nullen im Resultat eine Decimalstelle mehr erhält, so hat man darin ein Mittel, nicht nur die irrationale Quadratwurzel eines jeden Decimalbruchs, sondern auch jeder ganzen Zahl auf so viel Decimalstellen zu berechnen, und dadurch dem wahren Werthe der Wurzel so nahe zu kommen, wie es irgend wünschenswerth ist.

§. 160.

Aus einem gewöhnlichen Bruche wird die Quadratwurzel am besten dadurch erhalten:

1) Daß man den Nenner rational macht, indem man Zähler und Nenner mit dem Nenner multiplicirt, und dann aus beiden die Quadratwurzel zieht, z. B.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}.$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{15} = \tfrac{1}{5} \,.\, 3,8729\ldots = 0,7745\ldots$$

2) oder dadurch, daß man den Bruch zuerst in einen Decimalbruch verwandelt und aus diesem dann die Quadratwurzel zieht. Z. B.

$$\sqrt{\tfrac{3}{5}} = \sqrt{0{,}6} = 0{,}7745\ldots$$

§. 161.

Aus §. 152. ist deutlich, was die Ausdrücke: genaue Cubikwurzel, vollkommene Cubikzahl, nächst kleinere und nächst größere Cubikwurzel, unvollkommene Cubikzahl bedeuten.

Es ist z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, also 2 die genaue Cubikwurzel von 8, und 8 eine vollkommene Cubikzahl. Dagegen liegt $\sqrt[3]{26}$ zwischen 2 und 3, folglich ist 2 die nächst kleinere und 3 die nächst größere Cubikwurzel von 26, und 26 eine unvollkommene Cubikzahl.

§. 162.

Der Cubus einer $n$ziffrigen Zahl hat wenigstens $3n - 2$, höchstens aber $3n$ Ziffern und kann daher auch $3n - 1$ Ziffern haben.

Beweis. Jede $n$ziffrige Zahl ist größer als 10^{n-1}, aber kleiner als 10^n, also ist der Cubus einer $n$ziffrigen Zahl größer als 10^{3n-3}, aber kleiner als 10^{3n}. Da nun 10^{3n-3} die kleinste $3n - 3 + 1$, d. h. die kleinste $3n - 2$ziffrige Zahl ist, so hat der Cubus, da er größer sein muß, mindestens $3n - 2$ Ziffern; und da 10^{3n} die kleinste $3n+1$ziffrige Zahl ist, der Cubus der $n$ziffrigen Zahl aber kleiner sein soll, so kann er höchstens $3n$ Ziffern und daher auch $3n - 1$ Ziffern haben.

§. 163.

Hat daher umgekehrt eine numerische Zahl $3n$, oder $3n - 1$, auch $3n - 2$ Ziffern, so ist ihre genaue oder nächst kleinere Cubikwurzel $n$ziffrig. So ist z. B. die Cubikwurzel aus jeder 9, 8 und 7ziffrigen Zahl allemal 3ziffrig.

§. 164.

Schreibt man eine numerische Zahl als algebraische Summe, so kann man dieselbe nach der Formel des §. 149. auf eine ähnliche Art cubiren, wie dieselbe im §. 155. quadrirt worden ist. Z. B.

$3214 = 3 \,.\, 10^3 + 2 \,.\, 10^2 + 1 \,.\, 10 + 4$, mithin

$(3214)^3 = (3 \,.\, 10^3)^3$

$$+ 3 \cdot (3 \cdot 10^3)^2 \cdot (2 \cdot 10^2)$$
$$+ 3 \cdot (3 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^2)^2$$
$$+ (2 \cdot 10^2)^3$$
$$+ 3 \cdot (3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2)^2 \cdot 1 \cdot 10$$
$$+ 3 \cdot (3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2) \cdot (1 \cdot 10)^2$$
$$+ (1 \cdot 10)^3$$
$$+ 3 \cdot (3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10)^2 \cdot 4$$
$$+ 3 \cdot (3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10) \cdot 4^2$$
$$+ 4^3.$$

Führt man die auf diese Art angedeuteten Rechnungen aus und schreibt die Summanden so unter einander, wie dies bei der Addition numerischer Zahlen gebräuchlich ist, so erhält man:

$(3214)^3 =$ 27	000	000	000		27			
5	400	000	000	oder die bei	5	4		
	360	000	000	der Addition		36		
	8	000	000	nicht in Be-		8		
	307	200	000	tracht kom-		307	2	
		960	000	menden			96	
		1	000	Nullen weg-			1	
	123	649	200	lassend:		123	649	2
		154	080				154	08
			64					64
33	199	964	344		33	199	964	344

Hieraus ergiebt sich folgende Regel für das Cubiren einer mehrziffrigen numerischen Zahl.

Man nehme den Cubus der ersten Ziffer links, dann das dreifache Produkt aus dem Quadrat der ersten Ziffer mal der zweiten, dann das dreifache Produkt aus dem Quadrat der zweiten Ziffer mal der ersten, dann den Cubus der zweiten Ziffer, dann das dreifache Produkt aus dem Quadrat der beiden ersten Ziffern (als eine Zahl gelesen), mal der dritten Ziffer, dann das dreifache Produkt aus dem Quadrat der dritten Ziffer mal den beiden ersten Ziffern (als eine Zahl gelesen), dann den Cubus der dritten Ziffer u. s. w.; schreibe alle auf diese Weise erhaltenen Theile des Cubus so untereinander, daß jeder folgende um eine Stelle rechts herausgerückt wird, und addire sie dann, so ist die Summe der Cubus der gegebenen mehrziffrigen Zahl.

§. 165.

Theilt man die auf diese Weise erhaltene Cubikzahl von der rechten zur linken Hand in Abtheilungen von drei und drei Ziffern ein, wie solches in obigem Beispiele durch senkrechte Striche geschehen ist, so macht man folgende Bemerkungen:

1) Die Zahl der Abtheilungen ist nach §. 163. gleich der Anzahl der Ziffern in der zugehörigen Cubikwurzel.

2) Der Cubus der ersten Ziffer der Wurzel ist in der ersten Abtheilung links enthalten.

3) Das dreifache Produkt des Quadrats der ersten Ziffer mit der zweiten Ziffer reicht bis hinter die erste Stelle, das dreifache Produkt aus dem Quadrat der zweiten Ziffer mal der ersten reicht bis hinter die zweite Stelle und der Cubus der zweiten Ziffer bis ans Ende der zweiten Abtheilung u. s. w.

Auf diese Bemerkungen gründet sich folgende Regel für das Finden der genauen oder der nächst kleineren Cubikwurzel aus einer mehrziffrigen numerischen Zahl: Man theile die gegebene Zahl von der rechten zur linken Hand in Abtheilungen zu 3 und 3 Ziffern ein, so ist durch die Anzahl dieser Abtheilungen die Anzahl der Ziffern in der Wurzel bestimmt, und die Rechnung zerfällt in ebensoviel Abschnitte:

1) Man wähle als erste Ziffer der Wurzel die größte Zahl, deren Cubus gleich oder kleiner ist, als die erste Abtheilung links, subtrahire diesen Cubus (in untenstehendem Beispiele 27) von der ersten Abtheilung (33) und nehme zu dem Rest (6) die folgende Abtheilung (199) herunter.

2) Nun bestimme man die folgende Ziffer der Wurzel so, daß die Summe aus dem dreifachen Produkt des Quadrats der ersten Ziffer mal der zweiten, aus dem dreifachen Produkt des Quadrats der zweiten Ziffer mal der ersten und aus dem Cubus der zweiten Ziffer, wenn diese Summanden bei ihrer Addition immer eine Stelle rechts herausgerückt werden, gerade noch von dem durch die folgende Abtheilung vermehrten Reste subtrahirt werden kann. Nach ausgeführter Subtraktion nehme man zu dem Rest (431) wieder die folgende Abtheilung (964) herunter.

3) Man setze nun die Rechnung ganz wie in Nr. 2. fort, nur, daß jetzt mit den bereits erhaltenen Ziffern der Wurzel (als

eine Zahl gelesen) ganz so verfahren wird, wie vorhin mit der ersten Ziffer.

Geht diese fortgesetzte Rechnung auf, so ist die gegebene Zahl die vollkommene Cubikzahl der gefundenen, folglich die letztere die genaue Cubikwurzel der gegebenen Zahl. Geht die Rechnung aber nicht auf, sondern bleibt bei der letzten Subtraktion noch ein Rest, so ist die gefundene Zahl die nächst kleinere Cubikwurzel der gegebenen.

$$\sqrt[3]{33|199|964|344} = 3214$$

$$\begin{array}{l}
27 \\ \hline
6199 \\
\left\{\begin{array}{r} 54 \\ 36 \\ 8 \end{array}\right\} \\ \hline
431964 \\
\left\{\begin{array}{r} 3072 \\ 96 \\ 1 \end{array}\right\} \\ \hline
123803344 \\
\left\{\begin{array}{r} 1236492 \\ 15408 \\ 64 \end{array}\right\} \\ \hline
0
\end{array}$$

Anmerkung. 1) Um die verlangte Rechnung mit einiger Geläufigkeit ausführen zu können, muß man die Cuben aller einziffrigen Zahlen im Gedächtniß haben, nämlich: $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$.

2) Das Bestimmen jeder folgenden Ziffer der Cubikwurzel kann, wie beim Ausziehen der Quadratwurzel, nur durch Probiren geschehen, doch läßt sich das Probiren auch dadurch einschränken, daß man die bereits gefundenen Ziffern (als eine Zahl gelesen), quadrirt, mit 3 multiplicirt und mit diesem Produkt in den durch die folgende Abtheilung vermehrten Rest, jedoch mit Ausnahme der beiden letzten Ziffern dividirt. Was in der Anmerkung 2. des §. 156. über die Wahl dieser Ziffer ferner gesagt ist, hat man auch hier zu beachten.

§. 166.

Ist a eine unvollkommene Cubikzahl, und man nimmt statt $\sqrt[3]{a}$, deren Werth nicht genau angegeben werden kann, die nächst

kleinere Cubikwurzel, so ist der Fehler, welchen man dabei begeht, natürlich kleiner als 1.

§. 167.

Für das Ausziehen der Cubikwurzel aus einem Decimalbruch ergiebt sich folgende Regel:

Man theile den Decimalbruch vom Komma aus nach rechts und nach links in Abtheilungen von 3 und 3 Ziffern ein und ergänze die in der letzten Abtheilung rechts etwa fehlenden Ziffern durch Anhängen von Nullen; hierdurch wird sein Nenner rational, da er die Form $\frac{a}{10^{3n}}$ erhält. Nun ziehe man aus ihm, ohne auf das Komma Rücksicht zu nehmen, also aus seinem Zähler die genaue oder nächst kleinere Cubikwurzel, und gebe derselben $\frac{1}{3}$ so viel Decimalstellen wie der Decimalbruch hatte, wodurch auch der Nenner, mithin auch nach §. 124. Nr. 2. der ganze Bruch durch 3 radicirt worden ist.

Das praktische Geschäft, wobei die in der Anmerkung Nr. 2. des §. 165. angegebenen Divisoren mit angeführt sind, sieht dann folgendermaßen aus:

$$\sqrt[3]{34,|625|100} = 3,25\ldots$$

$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ \hline 27 & 7625 \\ & \left\{\begin{array}{r} 54 \\ 36 \\ 8 \end{array}\right\} \\ \hline 3072 & 1857100 \\ & \left\{\begin{array}{r} 15360 \\ 2400 \\ 125 \end{array}\right\} \\ \hline & 296975 \end{array}$$

Hat a, x und d dieselbe Bedeutung wie im §. 158., dann ist:

$$3a^2x + 3ax^2 + x^3 = d, \text{ und angenähert}$$

$$x = \frac{d:3}{a^2 + ax},$$

wodurch sich wie im §. 158. der Fehler x annähernd berechnen läßt. Für das vorstehende Beispiel ist $d = 296975$, also

$$x = \frac{98991,7}{105625 + 325x},$$

oder, da die erste Stelle von $x = 9$, also $325x = 193$ wird,

$$x = \frac{98991,7}{105718} = 0,936, \text{ also}$$

$$\sqrt[3]{34,6251} = 3,25936\ldots$$

Hier ist die letzte Stelle um eine Einheit zu groß. Im Allgemeinen erhält man durch dies Verfahren so viel richtige Stellen, als man bereits für a gefunden hat, und nur, wenn x, wie hier, sehr nahe an 1 ist, wird dies nicht der Fall sein.

§. 168.

1) Ist der Zähler a des Decimalbruches eine unvollkommene Cubikzahl, und man nimmt statt des wahren Werthes von $\sqrt[3]{a}$ die nächst kleinere Cubikwurzel, welche durch k bezeichnet werden mag, so ist der Fehler, den man dadurch begeht, kleiner als eine Einheit der niedrigsten Ordnung des als Resultat erhaltenen Decimalbruches; denn nach §. 166. ist $\sqrt[3]{a} - k < 1$, folglich $\frac{\sqrt[3]{a}}{10^n} - \frac{k}{10^n} < \frac{1}{10^n}$.

2) Da man nun jedem Decimalbruch, so wie auch jeder ganzen Zahl beliebig viel Nullen als Decimalstellen anhängen kann, und mit jeden drei angehängten Nullen eine Decimalstelle im Resultate mehr erhält, so hat man darin ein Mittel, nicht nur die irrationale Cubikwurzel eines jeden Decimalbruchs, sondern auch jeder ganzen Zahl, auf so viel Decimalstellen zu berechnen, und dadurch dem wahren Werth der Wurzel so nahe zu kommen, als es irgend wünschenswerth ist.

§. 169.

Aus einem gewöhnlichen Bruche wird die Cubikwurzel am besten dadurch erhalten:

1) Daß man den Nenner rational macht, indem man Zähler und Nenner mit dem Quadrat des Nenners multiplicirt und dann aus beiden die Cubikwurzel zieht, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{ab^2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{75}{125}} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{75} = \tfrac{1}{5} . 4{,}216\ldots = 0{,}843\ldots$$

2) Oder dadurch, daß man den Bruch zuerst in einen Decimalbruch verwandelt, und dann aus diesem die Cubikwurzel zieht, z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{0{,}6} = 0{,}843\ldots$$

Fünftes Kapitel.

Das Rechnen mit negativen und gebrochenen Potenzen, sowie mit irrationalen und imaginären Wurzeln.

§. 170.

Sollen eingliedrige Ausdrücke, welche selbst Produkte sind, mit einer Zahl potenzirt werden, so geschieht dies nach der Formel $(ab)^m = a^m . b^m$, auch wenn m negativ oder gebrochen sein sollte, z. B.

$$(3ab)^{-2} = \frac{1}{9}a^{-2}b^{-2}; \text{ oder } (4ab)^{\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}.$$

Sind dabei die einzelnen Faktoren Potenzen, so werden auch diese nach der Formel $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ potenzirt. Z. B.

$$(3a^{-2}b^3c^{-3})^{-3} = \frac{1}{27}a^6b^{-9}c^9.$$

Gebrochene Ausdrücke kann man dabei entweder nach der Formel $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ behandeln; oder, da $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, mithin auch $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$ ist, so kann man auch jede im Nenner stehende Potenz als Faktor in den Zähler setzen, wobei man aber ihrem Exponenten das entgegengesetzte Vorzeichen geben muß, z. B.

$$\left(\frac{2a^{-1}b}{3c^3d^{-2}}\right)^2 = \frac{4a^{-2}b^2}{9c^6d^{-4}} \text{ oder}$$
$$= (\tfrac{2}{3}a^{-1}bc^{-3}d^2)^2 = \tfrac{4}{9}a^{-2}b^2c^{-6}d^4.$$

Diese letztere Methode pflegt man auch anzuwenden, wenn dergleichen Ausdrücke mit einander multiplicirt werden sollen, z. B.

$$\left(\frac{3a^2bc^{-1}}{x^{-1}y^2}\right) . \left(\frac{a^2x^{-1}y^{-2}}{3b^{-1}c^{-3}}\right) = (3a^2bc^{-1}xy^{-2}) . (\tfrac{1}{3}a^2bc^3x^{-1}y^{-2})$$
$$= a^4b^2c^2y^{-4}.$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß $x^{-m} . x^m = x^0 = 1$ ist, welche Zahl bekanntlich als Faktor allemal fortgelassen werden kann.

§. 171.

Sollen eingliedrige Ausdrücke, welche selbst Produkte sind, durch eine Zahl radicirt werden, so kann dies nach der Formel $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b}$ geschehen, wobei, wenn ein Faktor eine Potenz sein sollte, auch häufig die Formel $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ angewendet wird. Dies bringt aber nur dann eine Vereinfachung hervor, wenn eine dieser Wurzeln rational wird.

So läßt sich z. B. $\sqrt{a^3b^5}$ nicht vereinfachen, während $\sqrt{a^4b^6} = a^2b^3$ ist.

Man radicirt daher gewöhnlich nur die rationalen Faktoren und deutet die Radicirung der irrationalen Faktoren nur durch das Wurzelzeichen an, z. B.

$$\sqrt[3]{2a^4b^6c^9} = b^2c^3\sqrt[3]{2a^4}, \text{ oder}$$

$$\sqrt[m]{a^{mn}b^{mp}c^{-mq}d^r} = a^nb^pc^{-q}\sqrt[m]{d^r}.$$

Dabei lassen sich häufig die Coefficienten in Faktoren zerlegen, von denen einige rational sind, dann müssen auch diese radicirt werden, z. B.

$$\sqrt{24a^6b^{-4}c^3} = \sqrt{4 \,.\, 6 \,.\, a^6b^{-4}c^3} = 2a^3b^{-2}\sqrt{6c^3}, \text{ oder}$$

$$\sqrt[3]{54a^3b} = \sqrt[3]{27 \,.\, 2 \,.\, a^3b} = 3a\sqrt[3]{2b}.$$

§. 172.

Enthalten die Glieder einer algebraischen Summe irrationale Wurzeln, so vereinfache man letztere zuerst nach den im §. 171. gegebenen Regeln, und fasse dann diejenigen Glieder, welche dieselbe Wurzel enthalten, nach der Formel $a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b}$ zusammen, z. B.

$$5\sqrt{3} - \sqrt{27} - 3\sqrt{12} = 5\sqrt{3} - \sqrt{9 \,.\, 3} - 3\sqrt{4 \,.\, 3}$$
$$= 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$
$$= -4\sqrt{3}; \text{ oder}$$

$$7\sqrt[3]{54} + 2\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} - 5\sqrt{18} + 2\sqrt{48} - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 5\sqrt{\tfrac{1}{3}} =$$
$$7\sqrt[3]{27 \,.\, 2} + 2\sqrt[3]{\tfrac{2}{8}} - 5\sqrt{9 \,.\, 2} + 2\sqrt{16 \,.\, 3} - 2\sqrt{\tfrac{2}{4}} - 5\sqrt{\tfrac{3}{9}} =$$
$$21\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - 15\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - \sqrt{2} - \tfrac{5}{3}\sqrt{3} =$$
$$22\sqrt[3]{2} - 16\sqrt{2} + \tfrac{19}{3}\sqrt{3} \text{ u. s. w.}$$

§. 173.

Die Multiplikation der Wurzeln geschieht nach der Formel: $\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \,.\, \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{a \,.\, b \,.\, c}$, kann also nur ausgeführt werden, wenn sie gleiche Wurzelexponenten haben, z. B.

$$\sqrt[3]{7} \,.\, \sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{56} = 2\sqrt[3]{7}.$$

Sind die zu multiplicirenden Wurzeln mit rationalen Coefficienten verbunden, so multiplicire man letztere für sich und ebenso die

Wurzeln für sich, setze aber die rationalen Faktoren den irrationalen immer voran, z. B.

$$3\sqrt{5} \, . \, 6\sqrt{12} \, . \, \tfrac{1}{2}\sqrt{28} = 9 \, . \sqrt{5 \, . \, 12 \, . \, 28} = 36\sqrt{105}.$$

Haben die zu multiplicirenden Wurzeln verschiedene Wurzelexponenten, so muß man sie vorher auf gleiche Wurzelexponenten bringen, indem man den Radikanden, wenn er nicht schon die Form einer Potenz hat, als solche betrachtet, und dann das Gesetz anwendet: $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$. Um sogleich das einfachste Resultat zu erhalten, nimmt man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Wurzelexponenten zum gemeinschaftlichen Wurzelexponenten, z. B.

$$\sqrt[n]{a} \, . \sqrt[m]{b} \, . \sqrt[p]{c} = \sqrt[mnp]{a^{mp} \, . \, b^{np} \, . \, c^{mn}};$$

$$\sqrt{3} . \sqrt[3]{5} . \sqrt[4]{15} . \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{3^6 . 5^4 . 15^3 . 10^2} = \sqrt[12]{3^6 . 5^4 . 3^3 . 5^3 . 2^2 . 5^2}$$

$$= \sqrt[12]{3^9 \, . \, 5^9 \, . \, 2^2}; \text{ oder}$$

$$4\sqrt{3} \, . \, 5\sqrt[3]{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{2}{9}} = 10\sqrt[6]{3^3 \, . \left(\frac{4}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{9}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt[6]{\frac{3^3 . 4^2 . 2^2}{3^2 . 9^2}} = 10\sqrt[6]{\frac{3^3 . 2^2 . 2^2 . 2^2}{3^2 . 3^2 . 3^2}}$$

$$= \frac{20}{3}\sqrt[6]{27}.$$

Anstatt die Wurzeln nach dem oben angegebenen Verfahren auf gleiche Wurzelexponenten zu bringen, kann man sie auch zuerst als gebrochene Potenzen schreiben und dann die Exponenten auf gleiche Nenner bringen, z. B.

$$\sqrt[m]{a} \, . \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} . \, a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{mn}} . \, a^{\frac{m}{mn}} = a^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}.$$

Soll eine Wurzel mit einer rationalen Zahl multiplicirt werden, so muß man die Zahl erst als Wurzel mit gleichem Wurzelexponenten schreiben, und dann die Multiplikation ausführen. Man sagt in diesem Falle, der rationale Faktor werde unter das Wurzelzeichen geschafft. Z. B.

$$a \, . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \, . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}; \text{ oder}$$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{4}{9}} \, . \sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{4}{3}}.$$

§. 174.

Sollen algebraische Summen, deren Glieder Wurzeln oder Potenzen mit negativen Exponenten enthalten, multiplicirt, oder durch einander dividirt werden, so ist es in jedem Falle vortheil-

haft, die Wurzeln erst als gebrochene Potenzen zu schreiben, sämmtliche im Nenner stehende Potenzen in den Zähler als Faktoren zu setzen (wobei man, wie dies im §. 170. angegeben wurde, den Exponenten das entgegengesetzte Vorzeichen geben muß), dann aber erst alle Glieder nach steigenden oder fallenden Potenzen eines Buchstabens zu ordnen, und nun erst die Rechnung auszuführen. Nachher kann man im Resultat alle gebrochenen Potenzen wieder in Wurzeln verwandeln und die negativen Potenzen in die Nenner der einzelnen Glieder schaffen. Z. B.

$$\left(\frac{15b}{\sqrt{a}} - 13 + 4\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}} + \frac{10\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} - \frac{6\sqrt{a}}{b}\right) : \left(\frac{3\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}} - \frac{3\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} + 2\right) =$$

$$(15a^{-\frac{1}{2}}b - 13 + 4a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} + 10a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{1}{2}}b^{-1}) :$$
$$(3a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} - 3a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} + 2) =$$

(nach steigenden Potenzen von a geordnet, wobei zu bedenken ist, daß $13 = 13a^0$ und $2 = 2a^0$ ist;)

$$(15a^{-\frac{1}{2}}b + 4a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} - 13 + 10a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{1}{2}}b^{-1}) :$$
$$(3a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} + 2 - 3a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}).$$

Nun die Rechnung auf die bekannte Art ausgeführt:

Quotient: $5a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} - 2 + 2a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}$

$$3a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} + 2 - 3a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} \,\Big|\, 15a^{-\frac{1}{2}}b + 4a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} - 13 + 10a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{1}{2}}b^{-1}$$
$$15a^{-\frac{1}{2}}b + 10a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} - 15$$
$$-6a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} + 2 + 10a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{1}{2}}b^{-1}$$
$$-6a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} - 4 + 6a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}$$
$$6 + 4a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{1}{2}}b^{-1}$$
$$6 + 4a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{1}{2}}b^{-1}$$
$$0$$

Endlich im Resultate die gebrochenen und negativen Potenzen wieder fortgeschafft, giebt:

$$\frac{5\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}} - 2 + \frac{2\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}}.$$

§. 175.

Die Division zweier irrationalen Wurzeln geschieht nach dem Gesetz: $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$, und kann daher ebenfalls nur dann ausgeführt werden, wenn beide Wurzeln gleiche Wurzelexponenten haben, z. B.

$$\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3}.$$

Ist dies aber nicht der Fall, so müssen sie ebenso wie dies im §. 173. bei der Multiplikation geschehen ist, zuerst auf gleiche Wurzelexponenten gebracht werden, z. B.

$$\sqrt[3]{18}:\sqrt{3}=\sqrt[6]{18^2}:\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{18^2:3^3}=\sqrt[6]{2^2.3^4:3^3}=\sqrt[6]{12}.$$

Doch pflegt man ein solches Verfahren in der Regel nur dann anzuwenden, wenn sich voraussehen läßt, daß die Division der beiden Radikanden aufgehen wird; im entgegengesetzten Falle ist es besser, den Quotienten so umzuformen, daß der Divisor (Nenner) kein Wurzelzeichen mehr enthält, welches Verfahren man das Rationalmachen des Divisors (Nenners) nennt.

Ist der Divisor eingliedrig, so ist das Verfahren sehr einfach und auch aus folgenden beiden Beispielen deutlich zu ersehen:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\,.\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{\sqrt[n]{a\,.\,b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{a\,.\,b^{n-1}}.$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}}=\frac{a\,.\sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^p}\sqrt[n]{b^{n-p}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-p}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a}{b}\sqrt[n]{b^{n-p}}.$$

Ist der Divisor zweigliedrig und enthält derselbe nur Quadratwurzeln, so geschieht das Rationalmachen desselben dadurch, daß man Dividendus und Divisor, wenn letzterer eine Summe ist, mit der entsprechenden Differenz, und wenn der Divisor eine Differenz ist, beide mit der entsprechenden Summe multiplicirt, wodurch man im Divisor die Differenz zweier Quadrate erhält, z. B.

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a}{b-c}(\sqrt{b}-\sqrt{c}),\text{ oder}$$

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{(b-\sqrt{c})(b+\sqrt{c})}=\frac{a}{b^2-c}(b+\sqrt{c}).$$

$$\frac{4\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=\frac{(4\sqrt{6}-2\sqrt{3})(3\sqrt{3}-2\sqrt{6})}{27-24}=16\sqrt{2}-22.$$

u. s. w.

Ist der Divisor aber mehrgliedrig und enthält er ebenfalls nur Quadratwurzeln, so geschieht das Rationalmachen desselben, indem man ihn zuerst als einen zweigliedrigen Ausdruck betrachtet und dann wie oben verfährt. Hierdurch erhält man im Divisor allemal ein irrationales Glied weniger und kann nun dieselbe Operation so lange fortsetzen, bis sich im Divisor kein irrationales Glied mehr befindet. Z. B.

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}$$
$$= \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}$$
$$= \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}}$$
$$= \frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}; \text{ oder}$$

$$\frac{2+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(2+2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{(2+2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{2})^2-3}$$
$$= \frac{-2-5\sqrt{2}}{3-4\sqrt{2}} = \frac{(-2-5\sqrt{2})(3+4\sqrt{2})}{9-32}$$
$$= \frac{-46-23\sqrt{2}}{-23} = 2+\sqrt{2}.$$

Da $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ und

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ist, so ist auch

$a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$ und

$a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$.

Hierdurch ist man im Stande, in Ausdrücken von der Form $\frac{c}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}$ die Nenner rational zu machen; z. B.

$$\frac{9}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}} = \frac{9(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7.2}+\sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{7^2}-\sqrt[3]{7.2}+\sqrt[3]{2^2})}$$
$$= \sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}.$$

§. 176.

Häufig ist es wünschenswerth, die Quadratwurzel aus einem Ausdruck von der Form $a\pm\sqrt{b}$ in eine Summe zu verwandeln, indem man dadurch oft zu einem einfacheren Ausdruck gelangt. Hierzu dient folgende Formel:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b}}$$
$$\pm\sqrt{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b}},$$

von deren Richtigkeit man sich leicht dadurch überzeugen kann, daß man durch Quadriren der rechten Seite der Gleichung den Radikanden der linken Seite erhält, z. B.

$$\sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{49-24}} + \sqrt{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{49-24}}$$
$$= \sqrt{\frac{7}{2}+\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}}$$
$$= \sqrt{6}+1.$$

Soll umgekehrt ein mehrgliedriger Ausdruck in eine Quadratwurzel verwandelt werden, so erhebe man denselben ins Quadrat und setze das Quadratwurzelzeichen darüber, wodurch er natürlich in seinem Werthe nicht geändert wird, z. B.

$$\sqrt{6}+1 = \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} = \sqrt{6+2\sqrt{6}+1}$$
$$= \sqrt{7+2\sqrt{6}}.$$

§. 177.

Bei Betrachtung der speciellen Resultate der Wurzeln ergab sich, daß eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl, z. B. $\sqrt[2n]{-a}$ keine reelle Zahl vorstellen kann und daher als eine eigene Zahlform beibehalten wurde, welche im Gegensatz zu den reellen Zahlen eine imaginäre Zahl oder eine imaginäre Wurzel genannt, und an welcher nur die allgemeine Eigenschaft jeder Wurzel festgehalten wurde, daß sie mit ihrem Wurzelexponenten potenzirt, den Radikanden giebt. Aus dieser Eigenschaft allein müssen dann aber auch alle Gesetze, welche für das Operiren mit imaginären Wurzeln gelten sollen, hergeleitet werden.

§. 178.

Jede imaginäre Quadratwurzel läßt sich in einen reellen und in den imaginären Faktor $\sqrt{-1}$ zerlegen, z. B.

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1}.$$

Beweis. $\sqrt{-a}$ bedeutet diejenige Zahl, welche ins Quadrat erhoben, $-a$ giebt; quadrirt man die rechte Seite obiger Gleichung, so erhält man $(\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{a})^2\,.\,(\sqrt{-1})^2 = a\,.\,-1 = -a$, woraus folgt, daß beide Seiten der Gleichung dieselbe Zahl vorstellen müssen, also einander gleich gesetzt werden können.

In Folge dieser Zerlegung der imaginären Quadratwurzel reducirt sich ihre Behandlung einzig und allein auf die Behandlung des imaginären Faktors $\sqrt{-1}$, welchen man der Kürze halber gewöhnlich mit i bezeichnet.

§. 179.

Nach der Erklärung der imaginären Quadratwurzel ist allemal $i^2 = -1$, mithin $i^3 = i^2 . i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1$.

Diese Gesetze lassen sich aber auf folgende Art allgemeiner hinstellen:

Ist n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so ist:

1) $i^{4n} = +1$.
2) $i^{4n+1} = i$.
3) $i^{4n+2} = -1$ und
4) $i^{4n+3} = -i$.

Beweis. 1) Denn $\begin{cases} i^{4n} = (i^4)^n = (+1)^n = +1 \\ i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} + \frac{1}{+1} = +1. \end{cases}$

2) „ $i^{4n+1} = i^{4n} . i = +1 . i = i$.

3) „ $i^{4n+2} = i^{4n} . i^2 = (+1) . (-1) = -1$.

4) „ $i^{4n+3} = i^{4n} . i^3 = (+1) . (-i) = -i$.

Hiernach ist es leicht, jede beliebige Potenz von i zu erhalten, der Exponent mag eine positive oder negative ganze Zahl sein, indem man letzteren nur in eine Summe zu zerlegen braucht, deren erster Summand ein positives oder negatives Vielfaches von 4 und deren zweiter Summand 0 oder überhaupt kleiner als 4 ist. Die Potenz richtet sich dann stets nach diesem zweiten Summanden, z. B.

$$i^{29} = i^{4 \cdot 7+1} = i.$$
$$i^{-21} = i^{-4 \cdot 6+3} = -i.$$
$$i^{-18} = i^{-4 \cdot 5+2} = -1.$$
$$i^{32} = i^{4 \cdot 8+0} = +1.$$

§. 180.

Im Allgemeinen versteht man unter einem **imaginären Ausdruck** jeden Ausdruck von der Form $a + b . i$, wo a und b reelle Zahlen sind, also auch gleich Null sein können. Ist $b = 0$, so ist der Ausdruck selbst reell.

§. 181.

Zwei imaginäre Ausdrücke, z. B. $a + b\sqrt{-1}$ und $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ können nur dann einander gleich sein, wenn $a = \alpha$ und $b = \beta$ ist; denn ist

$a + b\sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, so muß auch

$a - \alpha = \beta\sqrt{-1} - b\sqrt{-1}$, oder

$$a - \alpha = (\beta - b)\sqrt{-1} \text{ sein.}$$

Da nun aber ein imaginärer Ausdruck nur dann gleich einem reellen sein kann, wenn der neben i oder $\sqrt{-1}$ stehende Faktor gleich Null ist, so muß $\beta - b$, also auch $a - \alpha = 0$, folglich $a = \alpha$ und $b = \beta$ sein.

§. 182.

Beim Rechnen mit imaginären Ausdrücken ist es praktisch bequem, den imaginären Faktor $\sqrt{-1}$ stets mit i zu bezeichnen, und dann erst die Rechnung auszuführen; auch hütet man sich dann leichter vor dem Fehler, welchen man begeht, wenn man mit imaginären Wurzeln ebenso rechnet, wie mit reellen Wurzeln. So ist z. B. $\sqrt{-1} \, . \, \sqrt{-1}$ nicht gleich $\sqrt{(-1) \, . \, (-1)} = \sqrt{+1} = \pm 1$, sondern nach §. 179. gleich $i^2 = -1$.

Ueber die Operation mit imaginären Ausdrücken mag noch Folgendes angeführt werden:

1) Bei der Addition und Subtraktion imaginärer Ausdrücke vereinige man die reellen und die imaginären Glieder für sich, indem man aus den letzteren i als gemeinschaftlichen Faktor heraustrennt, z. B.

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + b \, . \, i) + (c + d \, . \, i)$$
$$= (a + c) + (b + d) \, . \, i.$$

2) Bei der Multiplikation hat man die für die Multiplikation algebraischer Summen geltenden Regeln mit den Gesetzen des §. 179. in Verbindung zu bringen, z. B.

$$(a\sqrt{-1}) \, . \, (b\sqrt{-1}) = (a \, . \, i) \, . \, (b \, . \, i) = ab \, . \, i^2 = -ab.$$

$$\sqrt{-a} \, . \, \sqrt{-b} = (i\sqrt{a}) \, . \, (i\sqrt{b}) = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}.$$

$$(a + b\sqrt{-1}) \, . \, (a - b\sqrt{-1}) = (a + b \, . \, i) \, . \, (a - b \, . \, i)$$
$$= a^2 - b^2 i^2$$
$$= a^2 + b^2.$$

3) Bei der Division arbeitet man immer darauf hin, den Nenner reell zu machen, wobei man, wenn derselbe zweigliedrig ist, von der Formel $(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2$ Gebrauch macht, z. B.

$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{i\sqrt{a}}{i\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; und wenn man den Nenner auch noch rational macht, $= \frac{1}{b}\sqrt{ab}$.

$$\frac{26}{2-3\sqrt{-1}}=\frac{26}{2-3i}=\frac{26(2+3i)}{4+9}=\frac{26(2+3i)}{13}=4+6i$$
$$=4+6\sqrt{-1}.$$

§. 183.

Von der Formel in §. 176. läßt sich besonders bei imaginären Ausdrücken vortheilhaft Gebrauch machen, z. B.

1) $\sqrt{5-\sqrt{-24}}=\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{25+24}}-\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{25+24}}$
$=\sqrt{6}-\sqrt{-1}.$

2) $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{0+\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}}$

u. s. w.

Uebungen zum sechsten Abschnitt.

A. Allgemeine Gesetze der Radicirung.

1. Wenn m in x gleiche Faktoren zerlegt wird, wie groß ist jeder Faktor?
   Antw. $\sqrt[x]{m}$.
2. Welche Zahl giebt zur $(p+q)$ten Potenz erhoben die Zahl $p+q$?
   Antw. $\sqrt[p+q]{p+q}$.
3. Wie groß ist $\sqrt[3]{8^3}$ und $(\sqrt[3]{8})^3$?
   Antw. 8.
4. Womit muß $\sqrt{5}$ multiplicirt werden, damit 5 herauskommt, und womit $\sqrt{a}$, damit a herauskommt?
   Antw. $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ und $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$.
5. $\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[n]{b^n}+(\sqrt[n]{m})^n+a:(\sqrt{a:b})^2=a+m.$
6. $(\sqrt[x]{a})^{3y-p}.(\sqrt[x]{a})^{2x-3y}.(\sqrt[x]{a})^{p-x}=a.$
7. $(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a-b+c}).(\sqrt{a+b-c}-\sqrt{a-b+c})$
   $=2(b-c).$
8. $a-[a-a:(\sqrt{a:b})^2]=b.$
9. $(3\sqrt{x})^2+(4\sqrt[3]{x})^3-(2\sqrt[4]{x-y})^4=57x+16y.$
10. $\sqrt[3]{8^7}+\sqrt{25^3}+\sqrt[3]{64^6}=65789.$
11. $\sqrt{(\frac{16}{25})^7}.\sqrt{(\frac{25}{64})^6}=\frac{1}{80}.$
12. $\sqrt{5^4}+\sqrt[3]{4^6}-\sqrt[4]{2^6}=37.$
13. $\sqrt[m]{a^{2m}b^m}+\sqrt[p]{b^pa^{3p}}-\sqrt[n]{b^n}.\sqrt[q]{a^{2q}}=ab^3.$
14. $(\sqrt[7]{a^3b^5})^3.(\sqrt[7]{a^3b^{12}})^4=a^3b^0.$

15. $2\sqrt[12]{\sqrt[5]{a}}+3\sqrt[5]{\sqrt[12]{a}}+2\sqrt[6]{\sqrt[10]{a}}-7\sqrt[10]{\sqrt[5]{a}}=0.$

16. Wenn $\sqrt[3]{531441}=81$ ist, wie groß ist $\sqrt[6]{531441}$, und wie groß $\sqrt[12]{531441}$?

Antw. 9 und 3.

17. $\sqrt{49\,.\,64}-\sqrt{100a^2b^2c^2}-\sqrt[3]{8a^3b^3c^3}=56+8abc.$

18. $\sqrt{18}+\sqrt{28}-\sqrt{75}=3\sqrt{2}+2\sqrt{7}-5\sqrt{3}.$

19. $\sqrt[x]{a}\,.\,\sqrt[x]{b}\,.\,\sqrt[x]{c}\,.\,\sqrt[x]{a^3}\,.\,\sqrt[x]{a^{x-7}}\,.\,\sqrt[x]{a^4}=a\sqrt[x]{abc}.$

20. $\sqrt[x+1]{a^3bc}\,.\,\sqrt[x+1]{a^7b^xc^{13-x}}\,.\,\sqrt[x+1]{a^{x-9}c^{2x-13}}=abc.$

21. $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}}\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{d}}\,.\,\sqrt[3]{cd}=a+b.$

22. $\sqrt{\frac{25}{49}}+\sqrt{\frac{64}{81}}+\sqrt{5\frac{1}{16}}+\sqrt{2\frac{14}{25}}+\sqrt{1\frac{9}{16}}=6\frac{443}{630}.$

23. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}+\sqrt[3]{\frac{64}{125}}-4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}-2\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}+3\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}=-3\frac{11}{30}.$

24. $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{25^3}{64^3}}}+\sqrt[3]{\sqrt{\frac{8^2}{27^2}}}-\sqrt[3]{\sqrt[x]{\frac{27^x}{125^x}}}=\frac{83}{120}.$

25. $\sqrt{2\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2}-2\frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}}=\frac{2ab}{c}\sqrt{2}.$

26. $\sqrt[6]{a^9b^8c^6}:\sqrt[6]{a^3b^2}+\sqrt[x]{a^{3x+2}}:\sqrt[x]{a^{2x+2}}=a\,(bc+1).$

27. $\frac{\sqrt[3]{3a^2b^2c^4-4a^4b^2c^2+5a^2b^4c^2}}{\sqrt[3]{\frac{3c}{ab}-\frac{4a}{bc}+\frac{5b}{ac}}}=abc.$

28. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}}-\frac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}}+\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{2\frac{1}{7}}}=8.$

29. $5\sqrt[12]{a^{30}}+\sqrt[14]{a^{35}}+9\sqrt[16]{a^{40}}-7\sqrt[18]{a^{45}}=8\sqrt{a^5}.$

30. $\sqrt[15]{a^7}\,.\,\sqrt[15]{a^3}+\sqrt[30]{a^{57}}:\sqrt[30]{a^{37}}=2\sqrt[3]{a^2}.$

B. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

1. $a^{-3}:a^{-5}=a^2.$
2. $2a^{-5}\,.\,3a^{-4}\,.\,5a^{-9}=30a^{-18}.$
3. $a^{-4}b^5c^{-1}\,.\,a^2b^{-8}c^3\,.\,4a^{-3}b^2c^{-2}=4a^{-5}b^{-1}.$
4. $\frac{5}{4}a^{-4}b^2c^{-3}:\frac{3}{2}a^{-7}b^{-3}c^2=\frac{5}{6}a^3b^5c^{-5}.$
5. $(2a^{-1}b^2-3a^{-4}b^{-2}+5ab^{-1})\,.\,3a^{-2}b^{-3}=6a^{-3}b^{-1}-9a^{-6}b^{-5}$ $+15a^{-1}b^{-4}.$
6. $(\frac{5}{2}a^{-2}b^{-3}c^{-4}+\frac{2}{3}abc^{-1}+\frac{1}{6}a^{-4}b^3c):\frac{5}{6}a^{-2}b^2c^{-4}=3b^{-5}+$ $\frac{4}{5}a^3b^{-2}c^3+\frac{1}{5}a^{-2}c^5.$
7. $\left(\frac{a^2b^{-5}c^{-1}}{d^{-4}x^2}\,.\,\frac{a^{-4}b^3x^{-3}}{c^{-2}d^5}\right):\left(\frac{a^{-3}c^{-3}}{d^{-1}x^{-2}}:\frac{b^{-1}x^4}{a^2c^{-5}}\right)=b^{-3}c^9d^{-2}x^{-3}.$

8. $a^0 + b^0 . c^0 - (d^0 : e^0) - (n^0)^x + (q_v)^0 + (m^0)^0 = 2.$

9. $(\frac{3}{5})^{-7} . (\frac{4}{11})^{-7} . (2\frac{7}{24})^{-7} + (2\frac{7}{12})^{-3} : (20\frac{2}{3})^{-5} = 640.$

10. $(a^{-1} b^{-2} c^3)^{-2} = a^2 b^4 c^{-6}.$

11. $\frac{(a^{-2} b^{-1} c^2)^{-3}}{(ab^{-2} c^{-1})^{-4}} = a^{10} b^{-5} c^{-10}.$

12. $\frac{(-2a)^3}{a} + \left(\frac{2}{-a^2}\right)^{-1} + \frac{1^p}{2a^{-2}} + 10 . \frac{(-a)^{2m}}{(a^2)^{m-1}} = 2a^2.$

13. $(2a)^5 - (-8a^2)^2 - [-(2a)^2]^3 - \{2[(-a)^{-5}]^{-1}\}^2 = 60a^6.$

14. $\left(\frac{2a^0}{b^{-5}}\right)^{-3} . \left(\frac{b^{-6}}{4a}\right)^{-1} = a.$

15. $\frac{5a^7 . 12a^{-3}}{4a^{-7} . 15a^9} . a^{-5} = 1.$

16. $\frac{(3ab)^{-2}}{(8xy)^3} : \left[\frac{9(a^2b^{-5})^{-5}}{(4a^{-2}b^3)^2} : \frac{(9ab)^2}{(4xy)^{-2}}\right] = 2.$

17. $\frac{(2a^3)^{-2} b^3 c^{-4}}{5x^{-3}y^4} : \frac{(5x^{-3})^{-1} y^{-4}}{(2^{-1}a^{-2}bc^{-2})^{-3}} = 2c^2.$

18. $\frac{3(ab^{-2})^2}{9c^{-3}} . \frac{-c^{-4}}{4(ab)^{-3}} . \frac{-(2c)^4 a^{-5}}{9b^{-2}} = \frac{4}{27} bc^3.$

19. $\left(\frac{a^{-3}b^{-5}c^{-1}}{x^{-4}y^{-6}}\right)^{-4} . \left(\frac{b^{-3}c^2y^8}{a^{-2}x^{-5}c^{-2}}\right)^3 = a^{18} b^{11} c^{16} x^{-1}.$

20. $\frac{3a^{-5}(4^{-2}a^2x^3)^{-2}}{2^{-15}(3^4a^2x^{-5})^{-1}} : \frac{15a^{-2}x^{-4}(2^{-4}a^{-3}x^5)^{-5}}{(3^3a^5x^{-4})^{-5} . 2^{-11} 3^2 a^{14} x^{-18}} = \frac{1}{5}a^{-4}.$

21. $[(2a^{-2})^{-5}]^{-1} + [\frac{1}{2}(-a)^3]^{-3} - [-(-a^{-1})^2]^3 - (-a^{-2})^3 = 14a^{-6}.$

22. $\frac{(-2a^0b)^2}{1 : b^{-2}} - \frac{4 . (-2^0)}{5 . (3-8)^{-1}} - (\frac{1}{2})^{-5} - \frac{2[(-ab)^4]^0}{(-0,5)^3} = 8.$

23. $\left[\left(\frac{1}{1-b}\right)^{-2} . \left(\frac{1}{b^{-1}-1}\right)^2\right]^4 = b^8.$

24. $a^{\frac{5}{3}} b^{-\frac{3}{2}} . a^{-\frac{1}{12}} b^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{19}{12}} b^{-1,1}.$

25. $a^{-\frac{3}{4}} b^{-1} c^2 . a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{2}} c^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{12}} b^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{4}{3}}.$

26. $\left(\frac{64a^{-10}b^{-3}}{49c^{-4}x^6}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{7^3 a^{15} b^3}{8^3 a^0 x^{-9}}.$

27. $\left(a^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{2}{3}} c^{\frac{15}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{2}{9}} c^{\frac{5}{4}}.$

28. $\left(\frac{a^2b^{-1}}{x^{-2}y^5}\right)^{\frac{2}{3}} . \left(\frac{a^{-1}x^4}{b^{-6}y^3}\right)^{-\frac{5}{6}} = a^{\frac{13}{6}} b^{-\frac{17}{3}} x^{-2} y^{\frac{1}{2}}.$

C. Das Quadriren und Cubiren algebraischer Summen.

1. $\left(\frac{3}{a} - \frac{a}{3}\right)^{-2} = \frac{9a^2}{81 - 18a^2 + a^4}.$

2. $(2ab^{-1} + 3a^{-2}b)^2 = 4a^2b^{-2} + 12a^{-1} + 9a^{-4}b^2.$

3. $(5a^{-4}b^5 - 7a^3b^{-9})^2 = 25a^{-8}b^{10} - 70a^{-1}b^{-4} + 49a^6b^{-18}.$

4. $(\frac{3}{4}a^{-1}b^2c^{-3} + \frac{1}{4}ab^{-2}c^3)^2 = \frac{9}{16}a^{-2}b^4c^{-6} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16}a^3b^{-4}c^6.$

5. $\left(a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{2}{3}}\right)^2 = a^{\frac{3}{2}} - 6a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}.$

6. $\left(\frac{4}{3}a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{5}{9}} - \frac{6}{5}a^{-\frac{3}{4}} b^{\frac{5}{2}}\right)^2 = \frac{16}{9}ab^{\frac{10}{9}} - \frac{16}{5}a^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{53}{18}} + \frac{36}{25}a^{-\frac{3}{2}} b^5.$

7. $(2a^{-3}b^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{4}}c - 4a^3b^{-\frac{1}{2}}c^{-1})^2 = 4a^{-6}b + 12a^{-3}b^{\frac{3}{4}}c + 9b^{\frac{1}{2}}c^2 - 16c^{-1} - 24a^3b^{-\frac{1}{4}} + 16a^6b^{-1}c^{-2}$.

8. $(\frac{1}{3}x^{-1}y^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{3}{4}}y^{-2} + \frac{1}{9}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{7}xy)^2 = \frac{1}{9}x^{-2}y - \frac{4}{15}x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{25}x^{\frac{3}{2}}y^{-4} + \frac{2}{27}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} - \frac{4}{21}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{81}xy^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{45}x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{7}{3}} + \frac{8}{35}x^{\frac{7}{4}}y^{-1} - \frac{4}{63}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{49}x^2y^2$.

9. $(1 + x - x^2 + 2x^3)^3 = 1 + 3x + x^3 + 12x^4 - 3x^5 - x^6 + 18x^7 - 12x^8 + 8x^9$.

10. $(1 - x + x^2)^6 = 1 - 6x + 21x^2 - 50x^3 + 90x^4 - 126x^5 + 141x^6 - 126x^7 + 90x^8 - 50x^9 + 21x^{10} - 6x^{11} + x^{12}$.

D. Das Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzeln.

a. Aus algebraischen Summen.

1. $\sqrt{(1 - 2x + x^4 + 3x^2 - 2x^3)} = \pm(1 - x + x^2)$.
2. $\sqrt{(4a^2 + 16a^6 + 12a^3 - 24a^5 - 7a^4)} = \pm(2a + 3a^2 - 4a^3)$.
3. $\sqrt{(17y^2 - 12y + 4 + 9y^6 - 12y^5 + 22y^4 - 24y^3)} = \pm(2 - 3y + 2y^2 - 3y^3)$.
4. $\sqrt[4]{(1 - 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8)} = \pm(1 - x + x^2)$.
5. $\sqrt{(a^2 + m + 2a\sqrt{m})} = \pm(a + \sqrt{m})$.
6. $\sqrt{(\frac{1}{4}x + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[6]{b^2x^3})} = \pm(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt[3]{b})$.
7. $\sqrt{(8a^3 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{4}{9} + 36a^6 - 12a^5 + a^4)} = \pm(\frac{2}{3} - a^2 + 6a^3)$.
8. $\sqrt{(\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}a^{-\frac{1}{2}})} = \pm(\frac{1}{2}a^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{1}{4}})$.
9. $\sqrt{(a^{-\frac{3}{2}} + 25a^{-1} + 49 + 16a - 10a^{-\frac{5}{4}} + 6a^{-\frac{3}{4}} - 8a^{-\frac{1}{4}} - 30a^{-\frac{1}{2}} - 24a^{\frac{1}{2}})} = \pm(a^{-\frac{3}{4}} - 5a^{-\frac{1}{2}} + 3 - 4a^{\frac{1}{2}})$.
10. $\sqrt{(23a^6b^{-2} + 5a^7b^{-1} + \frac{1}{4}a^8 - 20a^5b^{-3} + 4a^4b^{-4} - 3a^5b^2 - 30a^4b + 9a^2b^4 + 12a^3)} = \pm(3ab^2 + 2a^2b^{-2} - 5a^3b^{-1} - \frac{1}{2}a^4)$.
11. $\sqrt[3]{(54a^{10}b^{18} - 216a^{12}b^{18} + \frac{1}{8}a^6b^{12} - \frac{5}{2}a^5b^{14})} = \frac{1}{2}a^2b^4 - 6a^4b^8$.
12. $\sqrt[3]{(1 - 6x + 21x^2 - 44x^3 + 63x^4 - 54x^5 + 27x^6)} = 1 - 2x + 3x^2$.
13. $\sqrt[3]{(\frac{1}{27} - \frac{1}{6}x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{21}{32}x^5 - \frac{27}{64}x^6)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2$.
14. $\sqrt[3]{(63a^2z^4 - 54az^5 + 27z^6 + a^6 - 6a^5z + 21a^4z^2 - 44a^3z^3)} = 3z^2 - 2az + a^2$.
15. $\sqrt[3]{(1 - 6x - 21x^2 - 47x^3 + 75x^4 - 84x^5 + 66x^6 - 33x^7 + 9x^8 - x^9)} = 1 - 2x + 3x^2 - x^3$.
16. $\sqrt[3]{(a^3 + 28a^9 - 54a^{13} - 6a^5 - 27a^{15} - 9a^{11} + 3a^7)} = a - 2a^3 - 3a^5$.
17. $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \pm(a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} + \frac{7b^{10}}{256a^9} \ldots)$.
18. $\sqrt[3]{(a^3 + b^3)} = a + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} + \frac{5b^9}{81a^8} - \frac{10b^{12}}{243a^{11}} + \frac{22b^{15}}{729a^{14}} \ldots$

b. Aus Zahlen.

1. $\sqrt{3481} = \pm 59$.
2. $\sqrt{576} = \pm 24$.
3. $\sqrt{50625} = \pm 225$.
4. $\sqrt{1336336} = \pm 1156$.
5. $\sqrt{88529281} = \pm 9409$.
6. $\sqrt{62523502209} = \pm 250047$.
7. $\sqrt{146{,}41} = \pm 12{,}1$.
8. $\sqrt{0{,}5329} = \pm 0{,}73$.
9. $\sqrt{70{,}7281} = \pm 8{,}41$.
10. $\sqrt{576{,}4801} = \pm 24{,}01$.
11. $\sqrt{7{,}890481} = \pm 2{,}809$.
12. $\sqrt{20{,}151121} = \pm 4{,}489$.
13. $\sqrt{0{,}000001048576} = \pm 0{,}001024$.
14. $\sqrt{3} = \pm 1{,}73205 \ldots$
15. $\sqrt{7} = \pm 2{,}64575 \ldots$
16. $\sqrt{309} = \pm 17{,}57839 \ldots$
17. $\sqrt{0{,}24} = \pm 0{,}48989 \ldots$
18. $\sqrt{0{,}05} = \pm 0{,}22360 \ldots$
19. $\sqrt{\frac{324}{361}} = \pm \frac{18}{19}$.
20. $\sqrt{\frac{1444}{2025}} = \pm \frac{38}{45}$.
21. $\sqrt{1\frac{3}{16}} = \pm 1{,}08972 \ldots$
22. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0{,}81649 \ldots$
23. $\sqrt[4]{531441} = \pm 27$.
24. $\sqrt[4]{915{,}0625} = \pm 5{,}5$.
25. $\sqrt[8]{43046721} = \pm 9$.
26. $\sqrt[3]{5832} = 18$.
27. $\sqrt[3]{10648} = 22$.
28. $\sqrt[3]{474552} = 78$.
29. $\sqrt[3]{7529536} = 196$.
30. $\sqrt[3]{1544804416} = 1156$.
31. $\sqrt[3]{22164361129} = 2809$.
32. $\sqrt[3]{17{,}576} = 2{,}6$
33. $\sqrt[3]{91{,}125} = 4{,}5$.
34. $\sqrt[3]{1{,}771561} = 1{,}21$.
35. $\sqrt[3]{0{,}132651} = 0{,}51$.
36. $\sqrt[3]{0{,}830584} = 0{,}94$.
37. $\sqrt[3]{0{,}002197} = 0{,}13$.
38. $\sqrt[3]{7} = 1{,}91293 \ldots$
39. $\sqrt[3]{12} = 2{,}28942 \ldots$
40. $\sqrt[3]{0{,}026} = 0{,}296249 \ldots$
41. $\sqrt[3]{0{,}006} = 0{,}18171 \ldots$
42. $\sqrt[3]{0{,}000236} = 0{,}061797 \ldots$
43. $\sqrt[3]{0{,}000648} = 0{,}086534 \ldots$
44. $\sqrt[3]{0{,}00008} = 0{,}043088 \ldots$
45. $\sqrt[3]{0{,}000003} = 0{,}014422 \ldots$
46. $\sqrt[3]{\frac{8}{9261}} = \frac{2}{21}$.
47. $\sqrt[3]{181\frac{26}{27}} = 5\frac{2}{3}$.
48. $\sqrt[3]{1\frac{3}{8}} = 1{,}11199 \ldots$
49. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}79370 \ldots$
50. $\sqrt[3]{\frac{4}{7}} = 0{,}82982 \ldots$
51. $\sqrt[3]{2\frac{7}{9}} = 1{,}40572 \ldots$
52. $\sqrt[6]{16777216} = \pm 16$.
53. $\sqrt[6]{151334226289} = \pm 73$.
54. $\sqrt[9]{19683} = 3$.
55. $\sqrt[9]{262144} = 4$.
56. $\sqrt[12]{2176782336} = \pm 6$.

E. Division algebraischer Summen, in denen negative und gebrochene Potenzen enthalten sind.

1. $(2a - 3a^{\frac{1}{2}} - 6 + 18a^{-\frac{1}{2}} - 9a^{-1}) : (a^{\frac{1}{2}} - 3 + 3a^{-\frac{1}{2}}) = 2a^{\frac{1}{2}} + 3 - 3a^{-\frac{1}{2}}$.
2. $(2 + 9x^2 + x^{-2}) : (x^{-1} + 3x - 2) = 3x + 2 + x^{-1}$.
3. $(15a^{-\frac{1}{2}}b + 4a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} - 13 + 10a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}} - 6a^{\frac{1}{2}}b^{-1}) : (3a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} + 2 - 3a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}) = 5a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}} - 2 + 2a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{2}}$.
4. $(6x^{\frac{5}{2}} + 13x^2 - x + 11x^{\frac{1}{2}} - 6 - 2x^{\frac{3}{2}}) : (2x + 3x^{\frac{1}{2}} - 2) = 3x^{\frac{3}{2}} + 2x - x^{\frac{1}{2}} + 3$.
5. $\left(4x^{-5} - \frac{4}{x^4} + 11x^{-3} + \frac{3}{x^2} + 16\right) : \left(\frac{2}{x^2} - 3x^{-1} + 4\right) = 2x^{-3} + x^{-2} + 3x^{-1} + 4$.
6. $\left(\frac{9}{\sqrt{x^3}} + \frac{12}{\sqrt[4]{x^5}} + \frac{4}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{12}{\sqrt[4]{x}} - 36\right) : \left(\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 6\right) = \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + 6$.
7. $\left(\frac{1}{x} + x - 3\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}$.
8. $\left(\frac{15b}{a} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - 20 + \frac{16\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{8a}{b}\right) : \left(3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 2 - \frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) = \frac{5\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - 3 + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

F. Addition und Subtraktion irrationaler Wurzeln.

1. $3\sqrt{12} - 5\sqrt{1\frac{1}{3}} - \sqrt{3} + 4\sqrt{\frac{1}{12}} - \sqrt{27} + 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.
2. $3\sqrt{27} - 2\sqrt{147} - 4\sqrt{\frac{6}{8}} + 3\sqrt{75} - \frac{1}{2}\sqrt{48} = 6\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72} + \sqrt{8} = 4\sqrt{2}$.
4. $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{500} + \sqrt[3]{256} = 4\sqrt[3]{4}$.
5. $\sqrt[3]{32} + 1\frac{1}{5}\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{-2048} + \sqrt[3]{-500} + \sqrt[3]{-0{,}864} = 8\sqrt[3]{4}$.
6. $\sqrt[3]{\frac{4}{144}} + \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{0{,}4}{48{,}6}} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{-6} = \sqrt[3]{6}$.
7. $3\sqrt[6]{27} - 4\sqrt{\frac{6}{8}} + 3\sqrt{75} - 2\sqrt{147} = 2\sqrt{3}$.
8. $\sqrt[3]{40} + 5\sqrt[3]{\frac{1}{25}} + 6\sqrt[3]{-0{,}625} - \sqrt[3]{\frac{2}{0{,}4}} + 20\sqrt[3]{\frac{0{,}05}{10}} + 2\sqrt[3]{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{8})} = 0$.
9. $3\sqrt{4a^3b} + 7a\sqrt{ab} - 3\sqrt{a} + 5a\sqrt{\frac{1}{a}} = 13a\sqrt{ab} + 2\sqrt{a}$.
10. $\sqrt{147a^2b} + \sqrt{192b^3} - \sqrt{75a^2b} - 3b\sqrt{12b} = 2(a+b)\sqrt{3b}$.
11. $\sqrt{4a^3b} + \sqrt{25ab^3} - (a-5b)\sqrt{ab} - \sqrt{121a^3b} = 10(b-a)\sqrt{ab}$.
12. $\sqrt[3]{16a^4b^4c} - \sqrt[3]{54ab^4c^4} + \sqrt[3]{250a^4bc^4} = (2ab - 3bc + 5ac)\sqrt[3]{2abc}$.

13. $\sqrt{\frac{a^3x}{b^3}} - \sqrt{\frac{ax^5}{b^5}} + \sqrt{\frac{x^3}{ab}} = \left(\frac{a}{b^2} - \frac{x^2}{b^3} + \frac{x}{ab}\right)\sqrt{abx}.$

14. $\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^2c^3}{bx^2}} - \sqrt{\frac{a^2cx^2}{by^2}} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{x} - \frac{x}{y}\right)\frac{a}{b}\sqrt{bc}.$

15. $\sqrt{a^5bx^3} - \frac{b}{a}\sqrt{a^3bx^5} + \frac{ab}{x^2}\sqrt{ab^5x^3} = \left(a^2x - bx^2 + \frac{ab^3}{x}\right)\sqrt{abx}.$

16. $\sqrt{1 - \frac{1}{2}x} + 3\sqrt{4 - 2x} - \sqrt{16 - 8x} + 8\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}x} -$
$\frac{1}{x}\sqrt{-(2x^3 - 4x^2)} = \frac{5}{2}\sqrt{4 - 2x}.$

G. Multiplikation irrationaler Wurzeln.

1. $4\sqrt{6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{1\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{10}.$
2. $2\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{72} = 2\sqrt{6}.$
3. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^nb^m}.$
4. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{200}.$
5. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{600}.$
6. $4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot 3\sqrt{2} = \pm 240.$
7. $a\sqrt[4]{2a^3b} \cdot 3\sqrt{ab^3} \cdot \sqrt[4]{a^2b^5} \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^3b^{-1}} = 3a^3b^3\sqrt[4]{2ab^2}.$
8. $a\sqrt[m]{a^3b^4} \cdot \sqrt{ab^5} \cdot \sqrt[3]{a^6b^{-4}} \cdot \sqrt[m]{a^{-3}b^{-4}} = a^4b\sqrt[6]{ab}.$
9. $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^9}} \cdot \sqrt[3]{a^2\sqrt[8]{a^7}} = a\sqrt[3]{a^2}.$
10. $\frac{x+1}{x-2}\sqrt[3]{\frac{4a^4}{3c^5}} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1}\sqrt{\frac{3c^5}{2a^4}} = \frac{x+2}{x-1}\sqrt[6]{\frac{6c^5}{a^4}}.$
11. $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 4.$
12. $(5 + 2\sqrt{3})(8 - 4\sqrt{3}) = 16 - 4\sqrt{3}.$
13. $(1 + 8\sqrt{7})(3 - 5\sqrt{7}) = 19\sqrt{7} - 277.$
14. $(4 + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$
15. $(1\frac{2}{3}\sqrt{3} - 3\sqrt{\frac{2}{3}})(1\frac{2}{3}\sqrt{3} + 3\sqrt{\frac{2}{3}}) = 2\frac{1}{3}.$
16. $\left(-0{,}2\sqrt{-2(\sqrt{11} - 6)}\right)\left(-40\sqrt{12 + 2\sqrt{11}}\right) = 80.$
17. $(3\sqrt{5} + 2\sqrt{6})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{6})(2\sqrt{3} - 4\sqrt{10}) = 188\sqrt{3} - 6\sqrt{10}.$
18. $(2\sqrt{30} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 30.$
19. $(3\sqrt{0{,}2} + 2\sqrt{0{,}3} + \sqrt{0{,}6}) \cdot (\sqrt{0{,}6} + \sqrt{0{,}3} - \sqrt{0{,}9}) = 1\frac{1}{5}.$
20. $(4\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{8}) \cdot (5\sqrt{2} - \sqrt[3]{4}) = 40 + 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[4]{2} -$
$28\sqrt[6]{2} + \sqrt[12]{32}.$
21. $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{24} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[6]{54} + \sqrt[3]{9}) \cdot (\sqrt[6]{2} - \sqrt[6]{3}) = \sqrt[6]{32}$
$- \sqrt[6]{243}.$
22. $(a\sqrt{a} - b\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}) = a^3 - b^3.$

23. $(a\sqrt{b} + b\sqrt[4]{a^5b^{-1}}).(a\sqrt{b} - a\sqrt[4]{ab^3}) = a^2b(1 - \sqrt{ab})$.

24. $(a\sqrt[4]{b^3} + b\sqrt[4]{a^3}).(b\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^4b^3}) = ab^2\sqrt{a} - a^2b\sqrt{b}$.

25. $\sqrt{a^2 - b^2}.\dfrac{c\sqrt{ab - b^2}}{a^2x - 2abx + b^2x}.\sqrt{\dfrac{a-b}{b}} = \dfrac{c}{x}\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$.

26. $(ab - b^2)\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}}.\dfrac{a\sqrt{cx + c^2}}{a^2bx - b^3x} = \dfrac{a(c+x)}{x(a+b)}\sqrt{\dfrac{c-x}{c}}$.

27. $\dfrac{2p^3}{3q^4}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}.\dfrac{3q^3}{5p^4}\sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 1}} = \dfrac{2}{5pq}\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{x+1}}$.

28. $\dfrac{3x^2 - 27}{x+4}\sqrt{\dfrac{5a}{3x}}.\dfrac{2x+8}{x+3}\sqrt[3]{\dfrac{2x}{5a}} = 6(x-3)\sqrt[6]{\dfrac{20a}{27x}}$.

29. $\sqrt[m]{2a^2 - 3\sqrt{b}}.a\sqrt[m]{2a^2 + 3\sqrt{b}} = \sqrt[m]{4a^4 - 9b}$.

30. $\sqrt[6]{a^3b(7 + 4\sqrt{3})}.a\sqrt[6]{a\sqrt{3ab} - 2a\sqrt{ab}} = a^2\sqrt[3]{b}$.

H. Division irrationaler Wurzeln.

1. $2a\sqrt{b} : 3\sqrt{ab} = \frac{2}{3}\sqrt{a}$.
2. $5\frac{1}{4}\sqrt{18} : 3{,}5\sqrt{2} = 4\frac{1}{2}$.
3. $5\sqrt{a} : 2\sqrt[4]{a^3} = \dfrac{5}{2a}\sqrt[4]{a^3}$.
4. $8\sqrt{3} : 2\sqrt[4]{1\frac{1}{2}} = 4\sqrt[4]{6}$.
5. $a\sqrt[4]{ab^{-3}} : b\sqrt{ab} = \dfrac{1}{b^3}\sqrt[4]{a^3b^3}$.
6. $x : 3\sqrt{x} = \frac{1}{3}\sqrt{x}$.
7. $3 : \sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.
8. $2a^4b^2 : \sqrt[3]{4a^2b^{-4}} = a^3b^3\sqrt[3]{2ab}$.
9. $2\sqrt{a^2 - b^2} : \sqrt{a^3 - a^2b} = \dfrac{2}{a}\sqrt{a+b}$.
10. $(a+b) : \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - b^2} = 3\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$.
11. $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}} : \dfrac{4}{5}\sqrt[4]{\dfrac{b}{a^4}} = \dfrac{5a}{4b}\sqrt[12]{ab}$.
12. $\dfrac{51a^3b}{14x^4}\sqrt[3]{\dfrac{a^{11}c^3}{b^4x}} : \dfrac{34a^4c}{35b^2x^5}\sqrt[5]{\dfrac{b^2x^{11}}{a^9c^7}} = \dfrac{15a^3bc}{4x^2}\sqrt[5]{b^4x^3}$.
13. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{ax}}{x\sqrt[4]{a}}}.\sqrt[4]{\dfrac{x}{a\sqrt[3]{x}}}\right) : \sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2x^2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}$.
14. $6 : (3\sqrt{3} - 5) = 9\sqrt{3} + 15$.
15. $\sqrt{3} : (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 3$.
16. $(2 - \sqrt{2}) : (2 + \sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}$.

17. $[(\sqrt{3}-2):(2+\sqrt{3})]:(7+4\sqrt{3})=56\sqrt{3}-97.$
18. $12:(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}.$
19. $12:(\sqrt{6}-\sqrt{10}+2)=3+\sqrt{6}+\sqrt{15}.$
20. $(9\sqrt{2}-6\sqrt{3}-\sqrt{6}):(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6})=1+\sqrt{2}-\sqrt{6}.$
21. $(2+2\sqrt{3}+\sqrt{6}):(2-\sqrt{2}+\sqrt{3})=2+\sqrt{2}.$
22. $(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2):(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})=1-\sqrt{3}.$
23. $(a^2+a\sqrt{b}-\sqrt{ab}-a):(a+\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-\sqrt{a}.$
24. $13:\sqrt{5-2\sqrt{3}}=\sqrt{65+26\sqrt{3}}.$
25. $3:\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\sqrt{9\sqrt{2}+3\sqrt{6}}.$
26. $\sqrt[4]{a^8-a^4x^2}:\sqrt{a^2+x}=a\sqrt[4]{\frac{a^2-x}{a^2+x}}.$
27. $\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}:\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{a+b}{(a-b)^3}}.$
28. $(1-x):\sqrt{1-\sqrt{x}}=\sqrt{(1-x)(1+\sqrt{x})}.$
29. $\sqrt[3]{3ab^3-18ab^2+36ab-24a}:\sqrt[3]{2a^3b-18a^2b+54ab-54b}.$
$=\frac{b-2}{a-3}\sqrt[3]{\frac{3a}{2b}}.$
30. $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{(a-x)^2}}:\sqrt[6]{\frac{a^{-2}}{(a-x)^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{a^3}{a-x}}:\sqrt[-3]{\frac{a-x}{a^2}}\right)=$
$a\sqrt{\frac{a}{a-x}}.$

I. Zerlegung des Ausdrucks $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ in zwei Summanden.

1. $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.$
2. $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$
3. $\sqrt{7+\sqrt{48}}=2+\sqrt{3}.$
4. $\sqrt{6-4\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}.$
5. $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{7}-2.$
6. $\sqrt{93-24\sqrt{15}}=4\sqrt{3}-3\sqrt{5}.$
7. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=1+\sqrt{x-1}.$
8. $\sqrt{2p\pm2\sqrt{p^2-q^2}}=\sqrt{p+q}\pm\sqrt{p-q}.$
9. $\sqrt{6a-2\sqrt{9a^2-4x^2}}=\sqrt{3a+2x}-\sqrt{3a-2x}.$
10. $\sqrt{2a+2x+2\sqrt{2ax+2x^2}}=\sqrt{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}+$
$\sqrt{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}.$
11. $\sqrt{9+(12-8b)\sqrt{3b-b^2}}=3-2b+2\sqrt{(3-b)b}.$
12. $\sqrt{a^4-3a^2b^2+3b^4+(2a^2b-4b^3)\sqrt{a^2-b^2}}=$
$a^2-2b^2+b\sqrt{a^2-b^2}.$

13. $\sqrt{\sqrt{63}-\sqrt{35}}=\sqrt[4]{43{,}75}-\sqrt[4]{1{,}75}.$

14. $\sqrt{\sqrt{27}-2\sqrt{6}}=\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}.$

15. $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}=x+\sqrt{a^2-x^2}.$

16. $\sqrt{a^2+5ax-2a\sqrt{ax+4x^2}}=\sqrt{a^2+4ax}-\sqrt{ax}.$

K. Verwandlung eines mehrgliedrigen Ausdrucks in eine Quadratwurzel.

1. $\sqrt{3}-\sqrt{2}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}.$
2. $1+\sqrt{5}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}.$
3. $\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$
4. $(\sqrt{5}+1)\sqrt{6-2\sqrt{5}}=4.$
5. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}.$
6. $\sqrt{\tfrac{7}{4}\sqrt{\tfrac{5}{6}}+\sqrt{\tfrac{5}{2}}}-\sqrt{\tfrac{7}{4}\sqrt{\tfrac{5}{6}}-\sqrt{\tfrac{5}{2}}}=\sqrt[4]{7{,}5}.$
7. $\sqrt{8x^2+2x+8x\sqrt{x}}+\sqrt{8x^2+2x-8x\sqrt{x}}=4x\sqrt{2}.$
8. $\sqrt{x^2+x-1+2x\sqrt{x-1}}+\sqrt{x^2+x-1-2x\sqrt{x-1}}=2x.$
9. $\sqrt{(2a+3x)^2+2(2a-3x)\sqrt{24ax}}+\sqrt{(2a+3x)^2+2(2a-3x)\sqrt{24ax}}$
   $=4a-6x.$
10. $\sqrt{10x^4+x^2y^2+6x^3\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{10x^4+x^2y^2-6x^3\sqrt{x^2+y^2}}$
    $=2x\sqrt{x^2+y^2}.$

L. Rechnung mit imaginären Wurzeln.

1. $\sqrt{-ab^3}+\sqrt{-a^3b}-ab\sqrt{-\frac{a}{b}}+a^2\sqrt{-\frac{b}{a}}$
   $=(a+b)\sqrt{ab}\sqrt{-1}.$
2. $\sqrt{-4}+3\sqrt{-16}-2\sqrt{-36}+8\sqrt{-\tfrac{1}{4}}-3\sqrt{-1\tfrac{7}{9}}=2\sqrt{-1}.$
3. $i^{15}+i^{24}-i^{39}+i^{44}+i^{55}-i^{113}-i^{130}=3-2i.$
4. $(\sqrt{a}+\sqrt{-b}).(\sqrt{a}-\sqrt{-b})=a+b.$
5. $(4+\sqrt{-3}).(4-\sqrt{-3})=19.$
6. $b:\sqrt{-a}=-\frac{a}{b}\sqrt{-a}.$
7. $(\sqrt{b}+\sqrt{-b}):\sqrt{-a}=(1-\sqrt{-1})\,\frac{\sqrt{ab}}{a}.$
8. $\sqrt{x}:(x+2\sqrt{-x})=\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{-1}}{x+4}.$
9. $\sqrt{-a}:(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})=\frac{a+\sqrt{ab}}{a-b}.$
10. $7:(2-\sqrt{-3})=2+\sqrt{-3}.$
11. $14:(2\sqrt{3}-2\sqrt{-4})=\sqrt{3}+2\sqrt{-1}.$

12. $(\sqrt{8}-2):\sqrt{-2}-\sqrt{-4})=\sqrt{-2}.$

13. $2\sqrt{-2}+2\sqrt{-3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}):(\sqrt{2}-\sqrt{-12}) =$
$(2+\sqrt{6})\sqrt{-1}.$

14. $(a-b\sqrt{-a})^2=a^2-ab^2-2ab\sqrt{-a}.$

15. $(\sqrt{-1}+\sqrt{-2})^4=17+12\sqrt{2}.$

16. $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})^3=1.$

17. $(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})^3=1.$

18. $\sqrt{1+\sqrt{-3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}}.$

19. $\sqrt{2\sqrt{-10}+3}=\sqrt{5}+\sqrt{-2}.$

20. $\sqrt{2\sqrt{-4}+\sqrt{-12}}=\sqrt[4]{-9}+\sqrt[4]{-1}.$

M. Vermischte Aufgaben über Potenzen und Wurzeln.

1. $$\frac{1}{\left(\frac{2^0}{a^3}\right)^{-1} : \left[(\sqrt[3]{a^2})^2 \cdot (\sqrt[-3]{a^{-1}})^6\right]}=1.$$

2. $$\left[\frac{2(\sqrt[4]{a})^5\sqrt[4]{a^{-1}}}{\sqrt{a}}+\frac{b^{-1}\sqrt{ab}}{\sqrt[-2]{9b}}\right]a^{-\frac{1}{2}}=5.$$

3. $$\left[\left(\frac{1-\sqrt[-2]{3}}{1+\sqrt[-2]{3}}\right)^2+1\right]\cdot\frac{1}{2-\sqrt{3}}=4.$$

4. $$\frac{30\sqrt[6]{15}\cdot\sqrt[3]{10}\sqrt[-2]{10}-\sqrt{6}\sqrt[3]{18}}{6\sqrt[6]{\frac{3}{2}}}=4.$$

5. $$\frac{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{2\sqrt{2a^{-3}}}\sqrt[4]{2\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{16a^{-2}}\sqrt[-2]{\sqrt[-3]{4a^{-4}}}} = a.$$

6. $$\sqrt{\left(\frac{\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt{a}-\sqrt{b}\sqrt[5]{b^4}\sqrt[-10]{b^3}}{\sqrt[6]{a^5}\sqrt[-3]{a}-\sqrt[5]{b^2}\sqrt[10]{b}}\right)^2-4\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

7. $$\frac{2a+b\left[(1-\sqrt{-2})^2+(1+\sqrt{-2})^2\right]}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

8. $(12-2\sqrt{-3}+\sqrt{6}):(4-2\sqrt{-2}-\sqrt{-3})=2+\sqrt{-2}.$

9. $(13+3\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{5}):(\sqrt{3}+2\sqrt{5}-1)=\sqrt{3}+\sqrt{5}.$

10. $$\frac{(\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2+(\sqrt{30}+3\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{12})}{2-\sqrt{6}}$$
$= 2.$

11. $\sqrt[5]{(\frac{1}{8}\sqrt{2})^{-6}}=16.$

12. $\sqrt[1,5]{0{,}008}=0{,}04.$

Siebenter Abschnitt.

Von den Logarithmen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Logarithmirung.

§. 184.

Nach §. 139. läßt sich, wenn a und b absolute Zahlen sind, stets eine dritte Zahl c finden, so daß

$$a^c = b \text{ ist.}$$

Diese Zahl c nennt man den Logarithmus von b für die Basis a und bezeichnet denselben durch:

$$c = \log^a b.$$

Die Zahl b wird der Logarithmand, auch wohl Numerus genannt, und die Operation, durch welche die dritte Zahl c gefunden wird, heißt Logarithmirung.

Setzt man in $a^c = b$, statt c das dafür eingeführte Zeichen $\log^a b$, so erhält man:

1) $a^{\log^a b} = b$;

daher ist der Logarithmus auch die Zahl, mit welcher die Basis potenzirt werden muß, damit der Logarithmand entsteht.

Wird in $c = \log^a b$ statt a das gleiche a^c gesetzt, so erhält man:

2) $\log^a a^c = c$.

Beispiele: $\log^2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$.
$\log^4 16 = 2$, denn $4^2 = 16$.
$\log^8 2 = \frac{1}{3}$, denn $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.
$\log^2 \frac{1}{16} = -4$, denn $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.
$\log^2 2^8 = 8$, denn $2^8 = 2^8$.
$\log^5 125 = 3$, denn $5^3 = 125$ u. s. w.

Anmerkung. 1) Daß der Begriff der Logarithmirung sogleich aus dem der Potenzirung folgt, ergiebt sich aus folgender Betrachtung: Es ist $2^3 = 8$; wäre nun aus irgend einem Grunde der Exponent 3 nicht genau zu erkennen, so entsteht die Aufgabe, eine Zahl zu finden, welche als Exponent zu 2 gesetzt, 8 giebt. Da nun diese Zahl nicht immer so leicht wie hier zu finden ist, so muß sie durch die beiden gegebenen Zahlen 2 und 8 dargestellt werden können, und dies geschieht durch das Zeichen $\log^2 8$.

2) Hieraus folgt, daß die Logarithmirung die zweite entgegengesetzte Operation der Potenzirung ist.

3) Bezeichnet man den Logarithmand mit L, die Basis mit B und den Logarithmus mit l, so ist jede Logarithmirung richtig ausgeführt, wenn $B^l = L$ ist.

4) In Bezug auf das Einschließen in Klammern möge noch bemerkt werden, daß, wie früher, die höhere Operation allemal der niedrigeren vorangeht. So ist in dem Ausdruck $\log^a b + c$ nur b der Logarithmand, zu dessen Logarithmus für die Basis a die Zahl c zu addiren ist; soll dagegen $b + c$ der Logarithmand sein, so muß man setzen $\log^a (b + c)$. Ebenso muß man eigentlich $\log^a b \cdot c$ von $\log^a (bc)$ unterscheiden, um aber jede Undeutlichkeit zu vermeiden, setzt man statt des ersteren Ausdrucks lieber $c \cdot \log^a b$.

§. 185.

Soll man den Logarithmus einer gegebenen Zahl für eine gegebene Basis, z. B. $\log^{10} 2$ bestimmen, so kann dies in folgender Weise geschehen:

Ist $\log^{10} 2 = x$, so hat man nach §. 184. diejenige Zahl zu suchen, welche zu 10 als Exponent gesetzt, die Zahl 2 hervorbringt, es muß daher

$$10^x = 2 \text{ sein.}$$

Da aber $10^0 = 1$ und $10^1 = 10$ ist, so muß x zwischen 0 und 1 liegen, d. h. ein ächter Bruch sein. Setzt man $x = \frac{1}{y}$, so erhält man

$$10^{\frac{1}{y}} = 2;$$

oder beide Seiten mit y potenzirt:

$$10 = 2^y.$$

Da nun $2^3 = 8$ und $2^4 = 16$ ist, so muß y zwischen 3 und 4 liegen, d. h. es muß $y = 3 + \frac{1}{z}$ sein. Dann ist

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z}}, \text{ also}$$

$$\frac{10}{8} = 2^{\frac{1}{z}} \text{ oder}$$

$$1{,}25 = 2^{\frac{1}{z}}.$$

Potenzirt man beide Seiten mit z, so erhält man:

$$(1{,}25)^z = 2.$$

Nun ist $(1{,}25)^3 = 1{,}953125$ und $(1{,}25)^4 = 2{,}34140625$;

daher muß z zwischen 3 und 4 liegen, also $= 3 + \frac{1}{p}$ sein. Dann ist:

$$(1{,}25)^{3+\frac{1}{p}} = 2, \text{ oder}$$
$$(1{,}25)^3 \,.\, (1{,}25)^{\frac{1}{p}} = 2, \text{ also}$$
$$(1{,}25)^{\frac{1}{p}} = \frac{2}{1{,}953125} = 1{,}024.$$

Potenzirt man beide Seiten mit p, so erhält man:

$$1{,}25 = (1{,}024)^p.$$

Da nun $(1{,}024)^9$ kleiner, dagegen $(1{,}024)^{10}$ größer als 1,25 ist, so muß p zwischen 9 und 10 liegen, also $= 9 + \frac{1}{q}$ sein. Bricht man hier die Rechnung ab, so ist:

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{3 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{p}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9 + \frac{1}{q}}}}$$

Läßt man den letzten Bruch $\frac{1}{q}$ außer Acht und berechnet die Näherungswerthe des entstandenen Kettenbruchs, so erhält man $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{28}{93}$. Verwandelt man den dritten Näherungswerth $\frac{28}{93}$ in einen Decimalbruch, so findet sich:

$$\log^{10} 2 = 0{,}3010\ldots$$

§. 186.

Hierdurch ist die Möglichkeit nachgewiesen, für eine bestimmte Basis ein Verzeichniß aller Logarithmen der Zahlen von 1 an bis zu irgend einer beliebigen Grenze anzufertigen, welches man eine Logarithmentabelle nennt.

§. 187.

1) Ist die Basis eines Logarithmen-Systems eine negative Zahl, so bilden die Potenzen derselben keine kontinuirliche Reihe, da sie theils positiv, theils negativ, theils imaginär (wenn der Exponent ein Bruch ist, dessen Nenner eine gerade Zahl ist), sind.

2) Ist die Basis gleich Eins, so sind alle Potenzen derselben wieder gleich Eins.

3) Ist die Basis gleich Null, so sind alle positiven Potenzen derselben wieder gleich Null und alle negativen Potenzen gleich unendlich.

4) Nimmt man die Basis a eines Logarithmen-Systems positiv und größer als 1 an, so ist $a^x > 1$, sobald x positiv, und
$a^x < 1$, sobald x negativ ist.
Hieraus folgt, daß in einem solchen Systeme die Logarithmen aller Zahlen, die größer als 1 sind, positiv, und die der ächten Brüche negativ sein müssen. Dabei sind die Logarithmen der letzteren, ihrem absoluten Werthe nach, um so größer, je kleiner der Bruch ist; der Logarithmus von Null wird daher $= -\infty$ sein.

5) Ist dagegen die Basis a positiv und kleiner als 1, so ist
$a^x < 1$, wenn x positiv, und
$a^x > 1$, wenn x negativ ist.
In einem solchen Logarithmen-Systeme sind daher die Logarithmen aller Zahlen, die größer als 1 sind, negativ und die der ächten Brüche positiv.

§. 188.

Von jetzt an soll die Basis allemal positiv und größer als 1 angenommen werden, und weil man durch Potenzirung einer positiven Zahl allemal wieder eine positive Zahl erhält, so ist es klar, daß in einem solchen System eine negative Zahl keinen Logarithmus hat.*)

§. 189.

1) $\log^a 1 = 0$, da $a^0 = 1$ ist, und
2) $\log^a a = 1$, da $a^1 = a$ ist,
d. h. Der Logarithmus von Eins ist gleich Null und der der Basis selbst gleich Eins.

§. 190.

Die wichtigsten Beziehungen der Logarithmirung zu den übrigen Operationen sind folgende:

1) $\log^a (bc) = \log^a b + \log^a c$,
d. h. Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Faktoren; oder umgekehrt:

*) Es läßt sich aber nachweisen, daß ein solcher Logarithmus stets imaginär sein muß, indem er sich auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ zurückführen läßt. Wer eine gründlichere Belehrung über die Eigenschaften der verschiedenen Logarithmen-Systeme wünscht, muß dieselbe in anderen Schriften suchen.

Die Summe der Logarithmen zweier Zahlen ist gleich dem Logarithmus des Produkts dieser Zahlen.

Beweis. Hier ist $bc = L$, $a = B$ und $\log^a b + \log^a c$ soll $= l$ sein; dies ist der Fall, wenn $B^l = L$, also wenn

$$a^{\log^a b + \log^a c} = bc \text{ ist.}$$

Eine Zahl a wird mit einer Summe $\log^a b + \log^a c$ potenzirt, wenn man sie mit jedem Summanden einzeln potenzirt und die erhaltenen Potenzen multiplicirt. Die linke Seite der Gleichung geht daher über in

$$a^{\log^a b} \cdot a^{\log^a c},$$

wofür man nach §. 184. sogleich $b \cdot c$ setzen kann.

2) $\log^a \left(\frac{b}{c}\right) = \log^a b - \log^a c,$

d. h. **Der Logarithmus eines Quotienten (Bruchs) ist gleich dem Logarithmus des Dividendus (Zählers) minus dem Logarithmus des Divisors (Nenners)**; oder umgekehrt:

Die Differenz der Logarithmen zweier Zahlen ist gleich dem Logarithmus des Quotienten dieser Zahlen, wobei man den Logarithmand des Minuendus zum Dividendus und den des Subtrahendus zum Divisor nehmen muß.

Beweis. Hier ist $\frac{b}{c} = L$, $a = B$ und $\log^a b - \log^a c = l$. Dieser Logarithmus ist richtig, wenn $B^l = L$, also wenn

$$a^{\log^a b - \log^a c} = \frac{b}{c} \text{ ist.}$$

Eine Zahl a wird mit einer Differenz $\log^a b - \log^a c$ potenzirt, wenn man sie mit Minuend und Subtrahend einzeln potenzirt und die erstere Potenz durch die letztere dividirt. Die Gleichung ist daher richtig, wenn

$$a^{\log^a b} : a^{\log^a c} = \frac{b}{c} \text{ ist}$$

Dies ergiebt sich aber aus §. 184.!

3) $\log^a b^n = n \cdot \log^a b,$

d. h. **Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Exponenten mal dem Logarithmus der Basis**; oder umgekehrt:

Ein Logarithmus wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man den Logarithmanden mit dieser Zahl potenzirt.

Beweis. Hier ist $b^n = L$, $a = B$ und $n \cdot \log^a b$ soll $= l$ sein. Dies ist der Fall, wenn $B^l = L$, also wenn

$$a^{n \cdot \log^a b} = b^n \text{ ist.}$$

Eine Zahl a wird mit einem Produkt $n \cdot \log^a b$ potenzirt, wenn man sie erst mit dem einen und die erhaltene Potenz mit dem anderen Faktor potenzirt. Dadurch geht die linke Seite über in

$\left(a^{\log^a b}\right)^n$, welches nach §. 184. gleich b^n ist.

$$4)\ \log^a \sqrt[n]{b} = \frac{\log^a b}{n} = \frac{1}{n} \log^a b,$$

d. h. **Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikanden dividirt durch den Wurzelexponenten;** oder umgekehrt:
Ein Logarithmus wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Logarithmanden durch diese Zahl radicirt.

Beweis. $\log^a \sqrt[n]{b} = \log^a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log^a b$ nach Nr. 3. dieses §.

Anmerk. Nach Nr. 2. ist

$$\log(a + x) - \log a = \log \frac{a + x}{a} = \log \left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

Hieraus folgt, daß der Unterschied der Logarithmen zweier Zahlen um so kleiner ist, je kleiner der Unterschied dieser Zahlen und je größer diese Zahlen selbst sind, denn um so näher ist dann $1 + \frac{x}{a}$ der 1, also $\log\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ der Null gleich.

§. 191.

Durch wiederholte Anwendung der 4 Sätze des §. 190. kann man den Logarithmus eines jeden eingliedrigen Ausdrucks, mag derselbe auch noch so zusammengesetzt sein, in die Logarithmen seiner Bestandtheile zerlegen, z. B.

$$\log\left(\frac{\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[3]{b+c}}{a^{-3} \cdot \sqrt[m]{b^{-n}}}\right) = \log\left(\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[3]{b+c}\right) - \log\left(a^{-3} \cdot \sqrt[m]{b^{-n}}\right)$$

$$= \left(\log \sqrt[n]{a^m} + \log \sqrt[3]{b+c}\right) - \left(\log a^{-3} + \log \sqrt[m]{b^{-n}}\right)$$

$$= \frac{m}{n} \log a + \tfrac{1}{3} \log(b + c) + 3 \log a + \frac{n}{m} \log b.$$

§. 192.

Aus den vorstehenden Sätzen ergiebt sich, daß man jede Multiplikation, Division, Potenzirung und Radizirung bezüglich in eine Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division verwandeln

kann, wenn man ein Verzeichniß der Logarithmen aller Zahlen von 1 an bis zu einer gewissen Grenze hätte. Man brauchte dann nur die Rechnung, statt an den Zahlen selbst, an ihren Logarithmen auszuführen und endlich zu dem gefundenen Resultat den zugehörigen Logarithmanden oder Numerus in dem genannten Verzeichniß aufzusuchen.

§. 193.

Hat man aber eine Logarithmentabelle für eine Basis a berechnet, so kann man mit Hülfe derselben auch den Logarithmus jeder Zahl b für irgend eine andere Basis k auffinden. Bezeichnet man den zu findenden Logarithmus vorläufig mit x, so muß

$$k^x = b$$ sein.

Nimmt man von beiden Seiten dieser Gleichung die Logarithmen aus der vorhandenen Tabelle, so erhält man

$$\log^a k^x = \log^a b,$$ oder

$$x \,.\, \log^a k = \log^a b,$$ woraus folgt:

$$x = \frac{\log^a b}{\log^a k} = \log^a b \,.\, \frac{1}{\log^a k}.$$

Man muß daher den Logarithmus der gegebenen Zahl aus dem bekannten System mit einem Bruch multipliciren, dessen Zähler 1 und dessen Nenner der Logarithmus der neuen Basis, aus dem alten System entnommen, ist.

Diesen Bruch, mit welchem man alle Logarithmen eines bekannten Systems multipliciren muß, um ein neues Logarithmen-System zu erhalten, nennt man **Modul**.

Zweites Kapitel.

Von den gemeinen Logarithmen.

§. 194.

Dasjenige logarithmische System, in welchem die Basis 10 ist, nennt man zum Andenken an den ersten Berechner desselben, Henry **Briggs**, das **Briggische System**, und da es sehr häufig, besonders in den Elementar-Anwendungen, gebraucht wird, so heißt es auch das **gemeine** oder **vulgarische Logarithmen-System**. In der höheren Mathematik gebraucht man häufig ein Logarithmen-System, dessen Basis gleich 2,718 .... ist, und nennt dies das **natürliche Logarithmen-System**.

Von dem ersteren System wird von jetzt an nur die Rede sein, weshalb in der Bezeichnung die Basis gar nicht mehr angegeben werden soll. log 8 bedeutet also stets $\log^{10} 8$. Auch wird vorausgesetzt, daß man eine Logarithmentabelle für dies System besitze, deren Einrichtung aus der Tabelle selbst zu entnehmen ist.

§. 195.

Nur die Logarithmen der Potenzen von 10 können jetzt ganze Zahlen sein, z. B. $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$ u. s. w. Der Logarithmus jeder andern Zahl besteht daher aus einer ganzen Zahl, die man **Kennziffer** oder **Karakteristik** nennt, und einem Bruch, der gewöhnlich als Decimalbruch ausgedrückt wird und den Namen **Mantisse** führt.

So muß z. B. log 345 zwischen 2 und 3 liegen, mithin gleich 2 Ganzen plus einem ächten Bruch sein.

§. 196.

Die Kennziffer des Logarithmus einer nziffrigen ganzen Zahl ist stets gleich $n - 1$.

Beweis. Jede nziffrige Zahl ist größer als 10^{n-1}, aber kleiner als 10^n, mithin muß auch der Logarithmus einer nziffrigen Zahl größer als $\log(10^{n-1})$ und kleiner als $\log(10^n)$, d. h. größer als $n - 1$ und kleiner als n sein.

§. 197.

1) Unterscheiden sich zwei Zahlen nur durch angehängte Nullen, so sind ihre Logarithmen nur der Kennziffer nach von einander verschieden, ihre Mantissen dagegen einander gleich. Denn wenn eine dieser Zahlen gleich a ist, so kann man die andere als ein Produkt von der Form $a \cdot 10^n$ betrachten; dann ist aber

$$\begin{aligned} \log(a \cdot 10^n) &= \log a + n \cdot \log 10 \\ &= \log a + n. \end{aligned}$$

2) Dasselbe findet statt, wenn eine Zahl durch eine Potenz von 10 dividirt ist, denn

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{a}{10^n}\right) &= \log a - n \cdot \log 10 \\ &= \log a - n. \end{aligned}$$

Dies ist besonders für Decimalbrüche wichtig; soll man von einem solchen den Logarithmus aufschlagen, so suche man den Lo-

garithmus desselben ohne Rücksicht auf das Komma in der Tabelle auf, und subtrahire davon soviel Ganze, wie der Decimalbruch Decimalstellen hat,

$$\text{z. B. } \log 0{,}0043216 = \log 43216 - 7$$
$$= 4{,}6356446 - 7$$
$$= 0{,}6356446 - 3.$$

§. 198.

Denkt man sich die Ordnung, in welcher die einzelnen Ziffern einer numerischen Zahl stehen, durch darüber gesetzte, sogenannte *Stellenzahlen* angedeutet; so nämlich, daß über die Einer Null, über die Zehner + 1, über die Hunderter + 2, über die Tausender + 3 u. s. w., ferner über die Zehntel — 1, über die Hundertel — 2, über die Tausendtel — 3 u. s. w. gesetzt wird,

$$\text{z. B. } \overset{+2}{3}\,\overset{+1}{4}\,\overset{0}{2},\ \overset{-1}{5}\,\overset{-2}{4}\,\overset{-3}{0}\,\overset{-4}{9}\,\overset{-5}{6},$$

so ergiebt sich aus den obigen Sätzen folgende praktische Regel: *Die Kennziffer des Logarithmus einer numerischen Zahl ist allemal gleich der Stellenzahl der höchsten geltenden Ziffer.*

Hieraus folgt, daß die Kennziffer in den Tabellen ganz überflüssig ist und deshalb in denselben nicht angegeben zu werden braucht. Da aber die Mantissen immer absolut sind, so muß man eine negative Kennziffer stets hinter die Mantisse setzen.

Beispiele. $\log 24 = 1{,}3802112.$
$\log 24000 = 4{,}3802112.$
$\log 0{,}024 = 0{,}3802112 - 2.$
$\log 2{,}4 = 0{,}3802112.$

§. 199.

Sucht man zu einem gegebenen Logarithmus a den zugehörigen Logarithmanden oder Numerus, so pflegt man dies durch folgendes Zeichen auszudrücken: num log a. Dabei ergiebt sich aus §. 198. folgende praktische Regel:
Beim Aufsuchen des zu einem gegebenen Logarithmus gehörenden Logarithmanden setze man das Komma in der aus der Tabelle entnommenen Zahl so, daß die Stellenzahl der höchsten geltenden Ziffer mit der Kennziffer des Logarithmus übereinstimmt.

Beispiele. num log 0,9013766 = 7,9685.
num log 4,9013766 = 79685.
num log 7,9013766 = 79685000.
num log 0,9013766 — 3 = 0,0079685.
num log 0,9013766 — 1 = 0,79685.

§. 200.

Es sei a eine fünfziffrige Zahl und $\log(a+1) - \log a = d$, dann ist für $x = 2, 3, 4, 5$, bei siebenstelligen Logarithmen fast genau: $\log(a + x) = \log a + x \cdot d$, wovon man sich aus jeder Logarithmentabelle leicht überzeugen kann.

Wenn daher große Zahlen nur um einige Einheiten wachsen, dann ist der Zuwachs ihrer Logarithmen dem Zuwachs der Zahlen proportional. Für $x = 0{,}\alpha\beta$ erhält man hiernach um so mehr annähernd richtig:

$$\log a{,}\alpha\beta = \log a + 0{,}\alpha\beta \cdot d$$
$$= \log a + \alpha \cdot \frac{d}{10} + \beta \cdot \frac{d}{100}.$$

§. 201.

In den Logarithmentabellen findet man gewöhnlich nur die Logarithmen der fünfziffrigen Zahlen direkt berechnet, man kann aber durch Benutzung des §. 200. auch die Logarithmen der sechs und siebenziffrigen Zahlen erhalten.

Soll z. B. log 32564,52 gefunden werden, so setze man $32564 = a$; $5 = \alpha$; $2 = \beta$, dann ist

$$\log(a + 1) = 4{,}5127511$$
$$\log a = 4{,}5127377, \text{ also}$$
$$\log(a + 1) - \log a = 0{,}0000134 = d.$$

Setzt man nun diese Werthe in die Formel

$$\log a{,}\alpha\beta = \log a + \alpha \cdot \frac{d}{10} + \beta \cdot \frac{d}{100},$$ so erhält man

$$\log 32564{,}52 = 4{,}512737700$$
$$+ 0{,}000006700$$
$$+ 0{,}000000268$$
$$= 4{,}512744668,$$ oder auf 7 Decimalstellen
$$= 4{,}5127447.$$

In den meisten Logarithmentafeln ist diese Rechnung dadurch erleichtert, daß auf jeder Seite in der Rubrik p. p. (partes proportionales) die Differenz d, und auch sofort die Produkte derselben mit allen einziffrigen Zahlen angegeben sind.

§. 202.

Nach §. 200. ist annähernd $\log a,\alpha\beta = \log a + 0,\alpha\beta \,.\, d$

folglich ist $0,\alpha\beta = \frac{\log a,\alpha\beta - \log a}{d}$.

Die Formel kann man anwenden, um beim Aufsuchen des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus, außer den fünf in der Tafel stehenden Ziffern, auch noch die zwei folgenden zu finden.

Ist z. B. num log 4,7838088 zu suchen, so ist

$$\log a,\alpha\beta = 4{,}7838088$$
$$\log a = \log 60786 = 4{,}7838036$$
$$d = 0{,}0000071,$$

also $0,\alpha\beta = \frac{0{,}0000052}{0{,}0000071} = \frac{52}{71}$

$0,\alpha\beta = 0{,}73$; mithin ist

num log 4,7838088 = 60786,73.

Auch diese Rechnung ist in den Logarithmentafeln durch die im vorigen §. genannte Einrichtung vereinfacht.

§. 203.

Schon im §. 192. wurde angedeutet, wie man mit Hülfe der Logarithmentabelle einen zusammengesetzten Zahlenausdruck berechnen könne; da aber die in der Tabelle enthaltenen Mantissen stets positiv sind, so muß man negative Mantissen möglichst vermeiden.

Ist ein größerer Logarithmus von einem kleineren zu subtrahiren, so vergrößere man den Minuendus um so viel Ganze, daß die Summe den Subtrahendus übertrifft, und stelle diesen Zusatz als negative Kennziffer rechts daneben.

Beispiel. Es sei $\frac{365{,}42}{4896{,}5} = x$, so ist

$$\log x = \log 365{,}42 - \log 4896{,}5$$
$$\log 365{,}42 = 2{,}5627923 = 4{,}5627923 - 2$$
$$\log 4896{,}5 = 3{,}6898858 = 3{,}6898858$$
$$\log x = 0{,}8729065 - 2,$$

also $x = 0{,}07462882$.

§. 204.

Soll ein Logarithmus mit negativer Kennziffer durch eine Zahl dividirt werden, so muß man, um gebrochene Kennziffern zu vermeiden, zu beiden Gliedern des Dividendus so viel Ganze addiren, daß die Division in das zweite Glied aufgeht.

Beispiel. Es sei $\sqrt[5]{0{,}4627} = x$, so ist

$$\log x = \tfrac{1}{3} \log 0{,}4627$$
$$\log 0{,}4627 = 0{,}6652995 - 1$$
$$= 4{,}6652995 - 5$$
$$\log x = 0{,}9330599 - 1$$
$$\text{also } x = 0{,}857156.$$

§. 205.

Sind in einem mit Logarithmen zu berechnenden Zahlenausdrucke Summen und Differenzen enthalten, so läßt sich der Logarithmus desselben nicht in die Logarithmen seiner Bestandtheile zerlegen, da für den Logarithmus einer Summe oder Differenz keine Gesetze existiren. Es würde namentlich ein großer Fehler sein, wenn man setzen wollte: $\log (a \pm b) = \log a \pm \log b$.

In einem solchen Falle muß man vielmehr zuerst die einzelnen durch plus oder minus verbundenen Glieder für sich berechnen und dann die gefundenen Werthe zu einer Zahl vereinigen.

Beispiel. Es sei $\sqrt[8]{(2{,}35647)^5 + \sqrt[6]{20{,}354}} = x$, so setze man

$(2{,}35647)^5 = y$ und $\sqrt[6]{20{,}354} = z$, dann ist

$$\sqrt[8]{y + z} = x.$$

$$\log y = 5 \log 2{,}35647$$
$$\log 2{,}35647 = 0{,}3722619$$
$$\log y = 1{,}8613095$$
$$y = 72{,}66237$$
$$\log z = \tfrac{1}{6} \log 20{,}354$$
$$\log 20{,}354 = 1{,}3086498$$
$$\log z = 1{,}2181083$$
$$z = 1{,}652374$$
$$x = \sqrt[8]{y + z} = \sqrt[8]{74{,}31474}\,^{*)}$$
$$\log x = \tfrac{1}{8} \log 74{,}31474$$
$$\log 74{,}31474 = 1{,}8710749$$
$$\log x = 0{,}2338844$$
$$x = 1{,}713501.$$

§. 206.

Da die Basis des Briggischen Logarithmensystems gleich 10, also eine absolute (positive) Zahl ist, so kann man nach §. 188.

*) Die letzte Decimalstelle ist fortgelassen worden, weil die Tabellen nur die Logarithmen der 7ziffrigen Zahlen annähernd genau ergeben.
In solchen Fällen muß die in der Lehre von den Decimalbrüchen angegebene Regel über das Abkürzen beachtet werden.

von keiner negativen Zahl den Logarithmus erhalten, weshalb man sich besonders zu hüten hat, $\log - a = - \log a$ zu setzen, da $-\log a = \log \frac{1}{a}$ ist.

Kommen daher in einem mit Logarithmen zu berechnenden Ausdrucke positive und negative Zahlen vor, so untersuche man zuerst, von welchem Einfluß die Vorzeichen auf das Resultat sein werden, ob dasselbe nämlich positiv oder negativ sein wird. Ist Ersteres der Fall, so lasse man die Vorzeichen ohne Weiteres fort; ist dagegen das Resultat negativ, z. B. $x = -a$, so verfahre man wie in §. 205., d. h. man setze das absolute Glied $a = y$, berechne es mit Hülfe der Logarithmentafel und setze dann $x = -y$.

Beispiel. $x = \dfrac{(-2{,}54)^8 \cdot \sqrt[3]{-81{,}237}}{\sqrt[5]{-26 \cdot \sqrt[7]{-0{,}56}}}$

$(-2{,}54)^8$ ist, da 8 eine gerade Zahl ist, positiv, dagegen $\sqrt[3]{-81{,}237}$, da 3 eine ungerade Zahl ist, negativ. Der Zähler des Bruches ist mithin eine negative Zahl. Ebenso ist $\sqrt[7]{-0{,}56}$ negativ und das Produkt mit -26 positiv, mithin der Nenner positiv, also der Werth von x negativ. Man setze nun

$$\frac{(2{,}54)^8 \cdot \sqrt[3]{81{,}237}}{\sqrt[5]{26 \sqrt[7]{0{,}56}}} = y.$$

$$\log y = 8 \log 2{,}54 + \tfrac{1}{3} \log 81{,}237 - \tfrac{1}{5} (\log 26 + \tfrac{1}{7} \log 0{,}56).$$

$\log 2{,}54 = 0{,}4048337$
$8 \log 2{,}54 = 3{,}2386696$ (A)
$\log 81{,}237 = 1{,}9097539$
$\frac{1}{3} \log 81{,}237 = 0{,}6365846$ (B)
$A + B = 3{,}8752542$ (E)
$\log 26 = 1{,}4149733$ (C)
$\log 0{,}56 = 0{,}7481880 - 1 = 6{,}7481880 - 7$
$\frac{1}{7} \log 0{,}56 = 0{,}9640269 - 1$ (D)
$C + D = 1{,}3790002$
$\frac{1}{5}(C + D) = 0{,}2758000$ (F)
$E - F = 3{,}5994542 = \log y$
$y = 3976{,}072$, mithin
$x = -3976{,}072.$

§. 207.

Die Ergänzung einer Zahl a zu 10 nennt man ihre dekadische

Ergänzung und bezeichnet sie mit D . E . a, so ist

z. B. D . E . 3,7621532 = 6,2378468.

Man kann, statt eine Zahl b von einer andern a zu subtrahiren, die dekadische Ergänzung von b zu a addiren, nur muß man vom Resultat 10 subtrahiren, denn es ist

$$a - b = a + (10 - b) - 10.$$

Dies ist für die Rechnung mit Logarithmen vortheilhaft, wenn man von der Summe mehrerer Logarithmen einen oder mehrere Logarithmen zu subtrahiren hat, indem man dann alle gefundenen Zahlen in eine Reihe unter einander setzen und mit einem Male addiren kann.

Beispiel. $x = \frac{36{,}043 \,.\, 0{,}562}{4{,}238 \,.\, 0{,}467}$

$\log x = \log 36{,}043 + \log 0{,}562 + D.E \log 4{,}238 - 10 + D.E \log 0{,}467 - 10.$

$\log 36{,}043 = 1{,}5568209$

$\log 0{,}562 = 0{,}7497363 - 1$

$D.E \log 4{,}238 = 9{,}3728390 - 10$

$D.E \log 0{,}467 = 10{,}3306831 - 10$

$\log x = 22{,}0100793 - 21$

$= 1{,}0100793$

$x = 10{,}2348.$

Uebungen zum siebenten Abschnitt.

A. Logarithmirung zusammengesetzter Ausdrücke.

(Zu §. 191.)

1. $\log (ab)^3 = 3 (\log a + \log b).$
2. $\log \frac{a^m b^n}{c} = m \log a + n \log b - \log c.$
3. $\log \sqrt[m]{a^5 b^n c^{-p}} = \frac{1}{m} (5 \log a + n \log b - p \log c).$
4. $\log (a + b)^2 \sqrt{c - d} = 2 \log (a + b) + \frac{1}{2} \log (c - d).$
5. $\log \frac{1}{a \sqrt[4]{a^3 b}} = - (\frac{7}{4} \log a + \frac{1}{4} \log b).$
6. $\log \sqrt{a^5 \sqrt[4]{b^3}} = \frac{5}{2} \log a + \frac{3}{8} \log b.$
7. $\log \frac{a \sqrt[5]{x^3}}{b \sqrt{y}} = \log a - \log b + \frac{3}{5} \log x - \frac{1}{2} \log y.$
8. $\log \frac{a^3 \sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[3]{cx^2}} = 3 \log a + \frac{2}{5} \log b - \frac{1}{3} \log c - \frac{2}{3} \log x.$

9. $\log \frac{a^5 \sqrt[7]{b^4}}{c^2 \sqrt[4]{d^3}} = 5 \log a + \frac{4}{7} \log b - 2 \log c - \frac{3}{4} \log d.$

10. $\log a^3 \sqrt[7]{\frac{a^8 \sqrt[3]{b^2}}{b^6 \sqrt[4]{a^5}}} = \frac{111}{28} \log a - \frac{16}{21} \log b.$

11. $\log \left(a^2 \sqrt[3]{\frac{a^6 \sqrt{b}}{b^2 \sqrt[5]{a^4}}} \right)^2 = \frac{34}{5} \log a - \log b.$

12. $\log 3 (a - x) \sqrt{\frac{1}{a^2 - x^2}} = \log 3 + \frac{1}{2} \log (a - x) - \frac{1}{2} \log (a + x).$

13. $\log \log a^{2x} = \log 2 + \log x + \log \log a.$

14. $3 \log a + 6 \log b = \log a^3 b^6.$

15. $\frac{1}{2} \log a - \frac{1}{4} \log (2 + \sqrt{a}) = \log \sqrt[4]{\frac{a^2}{2 + \sqrt{a}}}.$

16. $\frac{n}{m} [\log (a - b) - \log (a + b)] = \log \sqrt[m]{\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^n}.$

B. Berechnung von Zahlenausdrücken mit Hülfe der Logarithmen.

(Zu §§. 203—207).

1. $\sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[6]{729} = 9.$

2. $\sqrt[7]{0{,}2365984} = 0{,}8139039.$

3. $\sqrt[5]{\frac{2789654}{0{,}003590069}} = 59{,}99147.$

4. $(\frac{9}{8})^{21} = 11{,}86322.$

5. $\left(\frac{8904562}{9946304}\right)^{0{,}023} = 0{,}9974586.$

6. $\left(\frac{0{,}0002569326}{36{,}45927}\right)^{0{,}11} = 0{,}2711947.$

7. $\sqrt[5]{\frac{(0{,}2365684)^3}{(0{,}0460273)^{0{,}4}}} = 0{,}5386824.$

8. $\sqrt[5]{263{,}5427 \cdot (0{,}42)^{0{,}4}} = 2{,}844658.$

9. $\sqrt[3]{\frac{47{,}327}{8{,}4794}} \cdot \sqrt{\frac{9{,}3488}{13{,}5727}} = 1{,}472175.$

10. $\sqrt[4]{0{,}4761 \cdot \sqrt[3]{0{,}097}} = 0{,}6838941.$

11. $\sqrt[7]{\frac{17}{31} \sqrt[5]{13}} = 0{,}9875377.$

12. $0{,}037 \sqrt[3]{\left(\frac{9788}{7579}\right)^5} = 0{,}05666808.$

13. $\frac{\sqrt[5]{(2{,}371)^3 \,.\, (0{,}043)^4}}{0{,}3918069} = 0{,}34567.$

14. $3{,}418426 \sqrt[5]{\frac{0{,}365 \sqrt{2}}{788}} = 0{,}78901.$

15. $\frac{253}{2{,}237958} \sqrt[3]{\frac{716{,}5}{\sqrt{2}}} = 901{,}23.$

16. $0{,}8428406 \,.\, \sqrt[4]{\frac{7389 \sqrt[11]{375}}{0{,}000734}} = 54{,}32109.$

17. $5{,}315824 \sqrt[9]{\frac{347 \sqrt[7]{0{,}0073}}{126 \sqrt[3]{\frac{4}{9}}}} = 5{,}670001.$

18. $\frac{(0{,}01)^{-0{,}01} \,.\, \sqrt[10]{0{,}001}}{(0{,}001)^{0{,}1} \,.\, (0{,}0001)^{-0{,}001}} = 1{,}037528.$

19. $\sqrt[10]{\frac{2 \sqrt[10]{2}}{\sqrt{10}}} = 0{,}9618631.$

20. $\sqrt[3]{\frac{0{,}8 \sqrt{0{,}8}}{0{,}9734034}} = 0{,}9025004.$

21. $\sqrt[3]{\frac{8 : (3{,}5)^{2{,}5}}{\sqrt{1{,}17}}} = 0{,}6859235.$

22. $\sqrt[10]{\frac{3 \,.\, (0{,}2)^{1{,}5}}{5 \,.\, \sqrt{8{,}213}}} = 0{,}6718069.$

23. $0{,}4 \sqrt[0]{\frac{3{,}5 \sqrt{0{,}03}}{(0{,}6)^3 \sqrt[3]{0{,}6}}} = 0{,}4571659.$

24. $\sqrt[7]{\frac{(\frac{2}{35})^{0{,}11} \,.\, 7^{\frac{1}{5}}}{(\frac{24}{7})^{-\frac{2}{3}} \,.\, (0{,}003)^5}} = 71{,}38505.$

25. $\sqrt[11]{0{,}43 \sqrt[10]{8 \sqrt[7]{0{,}7}}} = 0{,}9433822.$

26. $\sqrt[5]{2{,}2^{-2{,}2} \sqrt{85287{,}8}} = 2{,}2.$

27. $\sqrt[5]{24^{0,1} + 10^{0,3}} = 1,274999.$

28. $\sqrt[7]{(0,9067802)^4 - (2,365)^{0,6}} = -1.$

29. $\sqrt[10]{\frac{(1,012)^4}{(3,25)^{0,5}} + (3,6)^{0,1}} = 1,055636.$

30. $\frac{\sqrt[3]{-84,576} \, . \, (-2,834)^6}{\sqrt[5]{-28 \, . \, \sqrt[7]{-0,34}}} = -9673,169.$

31. $\sqrt[7]{0,88366 - \sqrt{0,7}} = 0,6461.$

32. $\sqrt[6]{0,84436734 - \sqrt{0,7}} = 0,4444444.$

33. $\frac{\sqrt{0,092416}}{0,07} - \sqrt[4]{0,092416} = 3,7914961.$

34. $\sqrt{0,734 + \frac{0,64}{\sqrt{0,064}}} = 1,806605.$

35. $\sqrt{0,64 - \sqrt[7]{0,078}} = 0,2336427 \sqrt{-1}.$

36. $7,115474 \sqrt[16]{\frac{43 + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}} = 9.$

37. $\sqrt[19]{\frac{57 + 31\sqrt[5]{3477}}{\sqrt[9]{1348}} + 8,727979} = 10.$

38. $\sqrt[4]{\frac{(16^{\frac{1}{2}} - 343^{\frac{2}{3}})^3 + 1809}{81^{\frac{5}{4}} - 179}} = 3.$

39. $\sqrt[3]{1367488 + \sqrt[3]{2924040 + \sqrt[3]{4657463}}} = 111.$

40. $87,89988 \sqrt[7]{\left(\frac{21,7 \, . \, 7,6439}{3159,3 \, . \, 5,471}\right)^3} = 12.$

41. $\sqrt[7]{(2,346504)^3 - (16,00543)^4} = -4,876863.$

42. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{0,2500342} - (2,3)^{10}} = -5,289838.$

Achter Abschnitt.

Von den Bestimmungs-Gleichungen.

Erstes Kapitel.

Von den Gleichungen im Allgemeinen und von den einfachen Gleichungen mit einem Unbekannten.

§. 208.

Die Verbindung zweier gleichen Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen nennt man eine Gleichung.

Unterscheiden sich die beiden Seiten einer Gleichung gar nicht von einander, so nennt man dieselbe eine identische Gleichung, z. B. $a = a$ oder $(a + b)\,c = (a + b)\,c$; sind dagegen die beiden Seiten so beschaffen, daß den Operationsgesetzen gemäß die eine für die andere gesetzt werden kann, welche Werthe die in ihnen vorkommenden Ausdrücke auch annehmen mögen, so nennt man die Gleichung eine analytische Gleichung,

z. B. $3 \,.\, 6 - 5 = 13$; oder $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Findet dagegen diese unbedingte Gleichheit beider Seiten der Gleichung nicht statt, so lassen sich für einen oder für mehrere der darin enthaltenen Zahlenausdrücke Werthe gesetzt denken, welche die Gleichung zu einer analytischen oder identischen machen. So ist z. B. die Gleichung $3 \,.\, a - 5 = 13$ nicht für jeden Werth von a richtig, sie wird aber sogleich analytisch, wenn man 6 an die Stelle von a gesetzt denkt, wodurch sie in $3 \,.\, 6 - 5 = 13$ oder $13 = 13$ übergeht. Eine solche Gleichung heißt eine Bestimmungs-Gleichung, und man sagt, sie sei in Bezug auf einen Ausdruck aufgelöst, sobald man den Werth, vielleicht auch die Werthe bestimmt hat, für welche die Gleichung zu einer identischen wird. Man pflegt diesen Ausdruck den unbekannten Ausdruck, kurzweg den Unbekannten zu nennen und durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets, z. B. durch x, y, z .... zu bezeichnen, während man für die bekannten die ersten Buchstaben des Alphabets, z. B. a, b, c ...., oder bestimmte in Ziffern geschriebene Zahlen setzt.

§. 209.

Die Bestimmungs-Gleichungen werden in algebraische und in transcendente eingetheilt. Zu den ersteren gehören alle

diejenigen, in welchen der Unbekannte entweder als Summand, Minuend, Subtrahend, Faktor, Dividend, Divisor, Basis einer Potenz oder Radikand einer Wurzel vorkommt. Enthält die Gleichung aber den Unbekannten unter irgend einer anderen Form, z. B. als Exponent einer Potenz oder Wurzel, so ist die Gleichung eine transcendente.

§. 210.

Jede algebraische Gleichung läßt sich auf die Form

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \ldots\ldots + px = q$$

bringen, in welcher a, b, c, ... p, q bekannte Ausdrücke bezeichnen und die Coefficienten der Gleichung genannt werden. Hat eine algebraische Gleichung diese Form, so nennt man sie geordnet oder reducirt, und benennt sie nach dem Exponenten der höchsten Potenz, in welcher der Unbekannte vorkommt; so daß, wenn dies die mte Potenz ist, die Gleichung vom mten Grade genannt wird. — Eine Gleichung vom ersten Grade heißt auch eine einfache Gleichung, sie enthält, geordnet, nur die erste Potenz von x und läßt sich daher immer auf die Form $ax = b$ bringen; eine Gleichung vom zweiten Grade nennt man auch eine quadratische Gleichung, sie enthält, geordnet, als höchste Potenz x^2, kann also auch x in der ersten Potenz enthalten, und läßt sich mithin allemal auf die Form $ax^2 + bx = c$ bringen.

§. 211.

Da Gleiches zu Gleichem addirt und Gleiches von Gleichem subtrahirt, stets Gleiches giebt, so kann man jeden beliebigen Summanden von einer Seite der Gleichung fortlassen und ihn auf der anderen Seite mit entgegengesetztem Vorzeichen hinzufügen. Solcher Summand wird ein Glied der Gleichung genannt. Ist z. B. $a + bc - r = d - e$, und man addirt auf beiden Seiten der Gleichung r, so geht sie über in:

$$a + bc = d - e + r;$$

und wenn man hierin von jeder Seite bc subtrahirt, so erhält man $a = d - e + r - bc$.

Hierbei ist aber zu beachten, daß man nur solche Ausdrücke von einer Seite auf die andere schaffen darf, welche wirkliche Summanden sind, dagegen nicht solche, die nur Theile von Summanden abgeben. So

würde es z. B. falsch sein, wenn man in obiger Gleichung e auf die andere Seite schaffen und schreiben wollte:

$$a + b = d - e + r - c.$$

Schafft man alle Glieder von einer Seite auf die andere, so bleibt auf der ersteren Seite Null, und man sagt, die Gleichung sei auf Null reducirt.

§. 212.

Der Satz, daß Gleiches mit Gleichem multiplicirt Gleiches giebt, läßt sich anwenden, um aus einer gegebenen Gleichung die vielleicht darin vorkommenden Nenner fortzuschaffen, d. h. eine andere Gleichung zu bilden, welche jene Nenner nicht mehr enthält. Zu diesem Zwecke multiplicire man alle Glieder der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (General-Nenner) sämmtlicher Nenner, z. B. $\frac{2a}{3b} - \frac{5}{10a} = c + \frac{d}{6ab(e+f)}$.

Der General-Nenner ist $30ab(e + f)$, und wenn man jedes Glied mit demselben multiplicirt, so fallen alle Nenner fort, und man erhält:

$$10a^2(e + f) - 15b(e + f) = 30abc(e + f) + 5d.$$

Wenn man sämmtliche Glieder einer Gleichung mit -1 multiplicirt, so erhalten dieselben entgegengesetzte Vorzeichen, die Gleichheit beider Seiten wird aber nicht dadurch aufgehoben.

§. 213.

Von dem Satze, daß Gleiches durch Gleiches dividirt Gleiches giebt, macht man Gebrauch, wenn alle Glieder einer Gleichung einen gemeinschaftlichen Faktor haben, indem man dann die Gleichung durch diesen Faktor dividirt; z. B.

$$a^2x + ab = a^2x^2 - abc + a$$

liefert, durch a dividirt:

$$ax + b = ax^2 - bc + 1.$$

Will man irgend ein Glied einer Gleichung von seinem Coefficienten befreien, so braucht man dieselbe nur durch diesen Coefficienten zu dividiren, z. B.

$$ax^3 + bx^2 + cx = d,$$

giebt, durch a dividirt:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x = \frac{d}{a}.$$

§. 214.

Sind in einer Gleichung Wurzeln enthalten, so kann man diese durch Anwendung des Satzes: Gleiches mit Gleichem potenzirt, giebt Gleiches, fortschaffen. Eine Wurzel fällt aber nur dann aus einer Gleichung fort, wenn sie als einziges Glied auf einer Seite allein steht, z. B.

$$\sqrt{a + x} = a - b$$

giebt, mit 2 potenzirt:

$$a + x = a^2 - 2ab + b^2.$$

Wollte man dagegen mit der Gleichung:

$$b + \sqrt{a + x} = a$$

ebenso verfahren, so würde man erhalten:

$$b^2 + 2b\sqrt{a + x} + a + x = a^2.$$

Man muß daher die Wurzel allemal erst auf eine Seite und alle anderen Glieder auf die andere Seite der Gleichung schaffen, bevor man beide Seiten mit dem Wurzelexponenten potenzirt.

Ist jede Seite einer Gleichung eine Wurzel, und sind die Wurzelexponenten verschieden, so potenzire man beide Seiten mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Wurzelexponenten, z. B.

$$\sqrt[m]{x} = \sqrt[n]{a}$$

giebt, mit mn potenzirt,

$$x^n = a^m.$$

Enthält eine Gleichung aber mehrere Wurzeln, ohne daß jede allein eine Seite bildete, so kann man dieselben nur durch mehrmaliges Potenziren beseitigen, z. B.

$$\sqrt{a + x} - a = \sqrt{a - x}$$

giebt, mit 2 potenzirt, zuerst:

$$a + x + a^2 - 2a\sqrt{a + x} = a - x.$$

Vereinigt man hierin einige Glieder und schafft die Wurzel allein auf die rechte Seite, so erhält man:

$$a^2 + 2x = 2a\sqrt{a + x}$$

und diese Gleichung mit 2 potenzirt, giebt endlich:

$$a^4 + 4a^2x + 4x^2 = 4a^3 + 4a^2x.$$

Das Fortschaffen der Wurzeln aus einer Gleichung wird auch oft das Rationalmachen der Gleichung genannt.

§. 215.

Das erste Geschäft beim Auflösen einer Gleichung ist das Ordnen derselben. Zu diesem Zwecke muß man:

1) alle Nenner (gewöhnlich nur diejenigen, in welchen der Unbekannte enthalten ist) fortschaffen;

2) diejenigen Klammern auflösen, in welchen der Unbekannte vorkommt;

3) diejenigen Wurzeln fortschaffen, in deren Radikanden sich der Unbekannte befindet;

4) alle Glieder, in denen der Unbekannte vorkommt, auf eine Seite schaffen, wobei man es so einzurichten pflegt, daß das Glied, welches die höchste Potenz des Unbekannten enthält, das Vorzeichen + vor sich hat;

5) alle Glieder nach fallenden Potenzen des Unbekannten ordnen.

Findet sich dann noch ein allen Gliedern gemeinschaftlicher Faktor, so wird die Gleichung durch denselben dividirt.

Z. B. $\frac{a(a+x)}{2b} + \sqrt{a-x} = \frac{x^2}{3a} - x.$

Die Nenner fortgeschafft, giebt:

$$3a^2(a+x) + 6ab\sqrt{a-x} = 2bx^2 - 6abx.$$

Die Klammern, in denen x steht, aufgelöst:

$$3a^3 + 3a^2x + 6ab\sqrt{a-x} = 2bx^2 - 6abx.$$

Die Gleichung rational gemacht:

$$6ab\sqrt{a-x} = 2bx^2 - 6abx - 3a^3 - 3a^2x.$$

$$36a^3b^2 - 36a^2b^2x = 4b^2x^4 + 36a^2b^2x^2 + 9a^6 + 9a^4x^2 - 24ab^2x^3 - 12a^3bx^2 - 12a^2bx^3 + 36a^4bx + 36a^3bx^2 + 18a^5x.$$

Alle Glieder, welche x enthalten, auf die linke Seite geschafft und nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$$-4b^2x^4 + (24ab^2 + 12a^2b)x^3 + (12a^3b - 36a^2b^2 - 9a^4 - 36a^3b)x^2 - (36a^2b^2 + 36a^4b + 18a^5)x = 9a^6 - 36a^3b^2.$$

Alle Glieder mit − 1 multiplicirt:

$$4b^2x^4 - (24ab^2 + 12a^2b)x^3 + (24a^3b + 36a^2b^2 + 9a^4)x^2 + (36a^2b^2 + 36a^4b + 18a^5)x = 36a^3b^2 - 9a^6.$$

§. 216.

Jede Gleichung vom ersten Grade (einfache Gleichung) hat, wenn sie geordnet ist, die Form $ax = b$; zur Auflösung derselben braucht man also nur beide Seiten durch a zu dividiren und erhält: $x = \frac{b}{a}$.

$$\text{z. B. } 5x - \frac{10x^2 - 18}{2x + 3} = 9 - \frac{7x + 9}{4x + 3}$$

$$\frac{10x^2 + 15x - 10x^2 + 18}{2x + 3} = \frac{36x + 27 - 7x - 9}{4x + 3}$$

$$\frac{15x + 18}{2x + 3} = \frac{29x + 18}{4x + 3}$$

$$60x^2 + 117x + 54 = 58x^2 + 123x + 54$$

$$60x + 117 = 58x + 123$$

$$2x = 6$$

$$x = 3.$$

Zweites Kapitel.

Von den einfachen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 217.

Enthält eine Gleichung mehr als einen Unbekannten, so kann man unzählig viele Werthe für die Unbekannten finden, welche die Gleichung zu einer identischen machen. Kommen z. B. in einer Gleichung n Unbekannte vor, so kann man $n - 1$ derselben ganz beliebig wählen, und wenn man dann die Gleichung nach dem nten Unbekannten auflöst, so wird sich für diesen allemal ein zugehöriger Werth ergeben müssen. Diese Art von Gleichungen nennt man unbestimmte oder diophantische Gleichungen,

z. B. $2x + 3y = 5$.

Setzt man hierin $y = 1$, so ergiebt sich $x = 1$,
" " " $y = 2$, " " " $x = -\frac{1}{2}$,
" " " $y = -1$, " " " $x = 4$ u. s. w.

Sind dagegen n Gleichungen zwischen n Unbekannten gegeben, so wird man durch die unten angegebenen Methoden bestimmte Werthe für diese n Unbekannten finden können, so daß, wenn man diese Werthe in alle n Gleichungen setzt, diese sämmtlich identisch werden.

Sind z. B. folgende Gleichungen gegeben:

1) $x + 2y = 11$,

2) $3x - y = 5$, und man wollte x ganz beliebig wählen, z. B. $x = 1$, so würde man aus der ersten Gleichung $y = 5$ finden. Beide Werthe würden aber die zweite Gleichung nur dann zu einer identischen machen können, wenn diese von der ersten abhängig wäre, d. h. aus der ersten abgeleitet werden könnte. In diesem Falle würden aber wieder unendlich viele Werthe für x und y existiren, und die Aufgabe würde ebenfalls eine unbestimmte sein.

Setzt man dagegen $x = 3$ und $y = 4$, so überzeugt man sich leicht durch einen Versuch, daß beide Gleichungen identisch werden.

Es folgt zum Theil schon hieraus, daß nur aus n von einander unabhängigen und sich nicht widersprechenden Gleichungen zwischen n Unbekannten die Werthe dieser n Unbekannten gefunden werden können.

§. 218.

Hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, in welchen diese nur in der ersten Potenz vorkommen, so werden sie sich immer auf die Form:

$$ax + by = c \text{ und}$$
$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

bringen lassen, worin a, b, c, α, β, γ als bekannt anzusehen sind. Es kommt nur darauf an, aus diesen beiden Gleichungen eine dritte abzuleiten, die nur einen Unbekannten enthält. Man nennt dies den anderen Unbekannten eliminiren, und hat dazu hauptsächlich 3 Methoden.

1) Die Substitutions-Methode besteht darin, daß man die eine Gleichung in Bezug auf einen der Unbekannten auflöst und den für denselben gefundenen Werth in die zweite Gleichung an die Stelle dieses Unbekannten setzt.

Die dabei anzuwendende praktische Form ist folgende:

$$\text{Gegeben} \begin{cases} 1) \; ax + by = c. \\ 2) \; \alpha x + \beta y = \gamma. \end{cases}$$

$$x \text{ aus } 1) \; x = \frac{c - by}{a}$$

$$x \text{ in } 2) \; \alpha \,.\, \frac{c - by}{a} + \beta y = \gamma$$

$$\alpha c - \alpha by + a\beta y = a\gamma$$

$$y(a\beta - b\alpha) = a\gamma - \alpha c$$

$$y = \frac{a\gamma - \alpha c}{a\beta - b\alpha}$$

$$y \text{ in } 1) \; ax + b\frac{a\gamma - \alpha c}{a\beta - b\alpha} = c$$

$$ax = c - \frac{ab\gamma - b\alpha c}{a\beta - b\alpha}$$

$$ax = \frac{ac\beta - bc\alpha - ab\gamma + b\alpha c}{a\beta - b\alpha}$$

$$x = \frac{ac\beta - ab\gamma}{a(a\beta - b\alpha)}$$

$$x = \frac{c\beta - b\gamma}{a\beta - b\alpha}.$$

2) Bei der zweiten Methode, der Combinations- oder Gleichsetzungs-Methode, löst man zuerst beide Gleichungen in Bezug auf denselben Unbekannten auf und setzt die gefundenen Werthe einander gleich, wodurch man eine Gleichung erhält, die nur noch den andern Unbekannten enthält, z. B.

$$\text{Gegeben} \begin{cases} 1)\ ax + by = c. \\ 2)\ \alpha x + \beta y = \gamma. \end{cases}$$

$$x \text{ aus } 1)\ x = \frac{c - by}{a} \quad (A$$

$$x \text{ aus } 2)\ x = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha} \quad (B$$

$$A = B)\ \frac{c - by}{a} = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha}$$

$$\alpha c - b\alpha y = a\gamma - a\beta y$$

$$y(a\beta - b\alpha) = a\gamma - \alpha c$$

$$y = \frac{a\gamma - \alpha c}{a\beta - b\alpha}.$$

Jetzt kann man den für y gefundenen Werth entweder in eine der beiden gegebenen Gleichungen setzen, wie dies bei der ersten Methode zuletzt ebenfalls geschehen ist; oder man kann dieselbe Methode noch einmal anwenden, indem man zuerst aus beiden gegebenen Gleichungen y entwickelt und die gefundenen Werthe einander gleich setzt. Dann ergiebt sich:

$$y \text{ aus } 1)\ y = \frac{c - ax}{b} \quad (C$$

$$y \text{ aus } 2)\ y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta} \quad (D$$

$$C = D)\ \frac{c - ax}{b} = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$$

$$c\beta - a\beta x = b\gamma - b\alpha x$$

$$x(b\alpha - a\beta) = b\gamma - c\beta$$

$$x = \frac{b\gamma - c\beta}{b\alpha - a\beta}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses für x gefundenen Ausdrucks mit -1, so erhält man denselben Werth wie bei der ersten Methode, nämlich:

$$x = \frac{c\beta - b\gamma}{a\beta - b\alpha}.$$

3) Bei der Additions- und Subtraktions-Methode giebt man dem zu eliminirenden Unbekannten in beiden Gleichungen denselben Coefficienten, und addirt oder subtrahirt hierauf beide Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben; z. B.

$$\text{Gegeben}\left\{\begin{array}{l}1)\ ax+by=c\\ 2)\ \alpha x+\beta y=\gamma\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lr}
\text{Nr. 1. mult. mit } \alpha) & a\alpha x+b\alpha y=c\alpha\ (A\\
\text{Nr. 2.}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad a) & a\alpha x+a\beta y=a\gamma\ (B\\
\hline
A-B) & y(b\alpha-a\beta)=c\alpha-a\gamma\\
 & y=\frac{c\alpha-a\gamma}{b\alpha-a\beta}=\frac{a\gamma-c\alpha}{a\beta-b\alpha}.\\
\text{Nr. 1. mult. mit } \beta) & a\beta x+b\beta y=c\beta\ (C\\
\text{Nr. 2.}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad b) & b\alpha x+b\beta y=b\gamma\ (D\\
\hline
C-D) & x(a\beta-b\alpha)=c\beta-b\gamma\\
 & x=\frac{c\beta-b\gamma}{a\beta-b\alpha}=\frac{b\gamma-c\beta}{b\alpha-a\beta}.
\end{array}$$

§. 219.

Da jede der drei Eliminations-Methoden zu demselben Resultat für x und y führt, so ist es im Allgemeinen gleichgültig, welche derselben man anwendet. Die dritte hat in der Hinsicht Vorzüge, daß man durch Anwendung derselben alle Rechnungen mit Brüchen vermeidet.

In manchen Fällen kann man sich die Elimination dadurch erleichtern, daß man aus den gegebenen Gleichungen andere mit kleineren Coefficienten abzuleiten sucht, z. B.

$$\text{Gegeben}\left\{\begin{array}{l}1)\ 112x-97y=545\\ 2)\ \ 71x+94y=190\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lr}
\text{Nr. 1. + Nr. 2.)} & 183x-3y=735\ (A\\
\text{A durch 3 dividirt)} & 61x-y=245\ (B\\
\text{y aus B)} & 61x-245=y\\
\text{y in 2.)} & 71x+94(61x-245)=190\\
 & 71x+5734x-23030=190\\
 & 5805x=23220\\
 & x=4\\
\text{x in B)} & 61 \cdot 4-y=245\\
 & 244-y=245\\
 & y=-1.
\end{array}$$

§. 220.

Sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so kann man durch Anwendung einer der erwähnten Eliminations-Methoden leicht 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten daraus ableiten.

Sind z. B. folgende 3 Gleichungen mit den Unbekannten x, y und z gegeben:

$$\begin{array}{l}1)\ ax+by+cz=d\\ 2)\ ex+fy+gz=h\\ 3)\ kx+ly+mz=n,\end{array}$$

so kann man z aus Nr. 1. und Nr. 2. eliminiren und erhält:

$$\text{A)}\ (ag - ce)\,x + (bg - cf)\,y = dg - ch.$$

Eliminirt man ferner z aus Nr. 2. und Nr. 3., so erhält man:

$$\text{B)}\ (em - gk)\,x + (fm - gl)\,y = mh - ng.$$

Die Gleichungen A und B enthalten nur noch x und y und reichen zur Bestimmung dieser Unbekannten hin. Hat man diese Werthe gefunden, so braucht man sie nur in eine der drei gegebenen Gleichungen zu setzen, um auch z zu erhalten.

§. 221.

Sind im Allgemeinen n von einander unabhängige und sich nicht widersprechende Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, und eliminirt man aus je zwei derselben einen dieser Unbekannten, so erhält man n — 1 Gleichungen mit n — 1 Unbekannten, und fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man zuletzt zu einer Gleichung mit einem Unbekannten. Aus dieser bestimmt sich der Werth dieses letzteren, und wenn man nun diesen Werth in eine derjenigen Gleichungen setzt, welche außer ihm nur noch einen Unbekannten enthält, so findet man auch diesen; u. s. w.

Zweckmäßig ist es aber vor der Anwendung einer dieser Methoden die Gleichungen erst zu ordnen, d. h. jede auf die Form $ax + by + cz + du \ldots\ldots = p$ zu bringen, z. B.

$$\text{Gegeben}\begin{cases}1)\ 3x - y + 2z - u = 6.\\ 2)\ 2x + 3y - z + 2u = 14.\\ 3)\ 5x + 4y - 3z + u = 6.\\ 4)\ 4x + 2y - 2z + 3u = 12.\end{cases}$$

Nr. 1. mit 2 mult. und zu Nr. 2. add.) $8x + y + 3z = 26.$ (A.

Nr. 1. + Nr. 3.) $8x + 3y - z = 12.$ (B.

Nr. 1. mit 3 mult. und zu Nr. 4. add.) $13x - y + 4z = 30.$ (C.

B mit 3 mult. und zu A add.) $32x + 10y = 62.$ (D.

B mit 4 mult. und zu C add.) $45x + 11y = 78.$ (E.

D mit 11 mult.) $352x + 110y = 682.$ (F.

E mit 10 mult.) $450x + 110y = 780.$ (G.

G — F) $98x = 98$

$x = 1.$

x in D) $32 + 10y = 62$

$10y = 30$

$y = 3.$

x und y in B) $8 + 9 - z = 12$

$z = 5.$

x, y und z in 3) $5 + 12 - 15 + u = 6$

$u = 4.$

§. 222.

Die gegebenen Regeln sind zur Auflösung einfacher Gleichungen mit mehreren Unbekannten vollkommen hinreichend, doch kann man in manchen Fällen die Elimination auf eine leichtere und kürzere Art ausführen. Aufmerksamkeit und Uebung bringen bald eine gewisse Fertigkeit hervor, z. B.

I. Gegeben $\begin{cases} 1)\ ax + by = m \\ 2)\ cy + dz = n \\ 3)\ ez + fx = p. \end{cases}$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\frac{f}{a}$, die zweite mit $\frac{e}{d}$, addirt dann beide und subtrahirt von der Summe die dritte, so erhält man:

$$\frac{bf}{a} y + \frac{ce}{d} y = \frac{mf}{a} + \frac{en}{d} - p, \text{ also ist}$$

$$y(bdf + ace) = dmf + aen - adp$$

$$y = \frac{dmf + aen - adp}{bdf + ace}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Gleichungen Nr. 1. und Nr. 2. ergiebt sich dann leicht x und z.

II. Gegeben $\begin{cases} 1)\ \frac{xy}{ay + bx} = m \\ 2)\ \frac{yz}{cz + dy} = n \\ 3)\ \frac{xz}{ez + fx} = p. \end{cases}$

Dividirt man Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche resp. durch xy, yz und xz, so erhält man:

$$1)\ \frac{1}{\frac{a}{x} + \frac{b}{y}} = m;\ 2)\ \frac{1}{\frac{c}{y} + \frac{d}{z}} = n;\ 3)\ \frac{1}{\frac{e}{x} + \frac{f}{z}} = p.$$

oder $1)\ \frac{1}{m} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y};\ 2)\ \frac{1}{n} = \frac{c}{y} + \frac{d}{z};\ 3)\ \frac{1}{p} = \frac{e}{x} + \frac{f}{z}.$

Führt man nun $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ und $\frac{1}{z}$ als Unbekannte ein, so ist die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt, nämlich:

$$1)\ a \cdot \frac{1}{x} + b \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{m}$$

$$2)\ c \cdot \frac{1}{y} + d \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$$

$$3)\ e \cdot \frac{1}{x} + f \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{p}.$$

III. Gegeben $\begin{cases} 1)\ x + y + z + u = a \\ 2)\ x + y + z + v = b \\ 3)\ x + y + u + v = c \\ 4)\ x + z + u + v = d \\ 5)\ y + z + u + v = e \end{cases}$

Addirt man die vier ersten Gleichungen, so erhält man:

$$4x + 3(y + z + u + v) = a + b + c + d \quad (A.$$

Multiplicirt man die 5te Gleichung mit 3 und subtrahirt sie von A, so ist

$$4x = a + b + c + d - 3e, \text{ also}$$

$$x = \frac{a + b + c + d - 3e}{4}.$$

Dasselbe Verfahren, in anderer Ordnung ausgeführt, ergiebt dann auch einfach die Werthe der anderen Unbekannten.

Drittes Kapitel.

Von den Gleichungen des zweiten Grades.

§. 223.

Nach §. 210. läßt sich jede quadratische Gleichung auf die Form $ax^2 + bx = c$ bringen. Ist hierin $b = 0$, so daß der Unbekannte nur in der zweiten Potenz vorkommt, so heißt die Gleichung eine rein quadratische, im entgegengesetzten Falle eine unrein quadratische Gleichung. Dividirt man beide Seiten einer quadratischen Gleichung durch den Coefficienten von x^2, wodurch sie die Form $x^2 + \frac{b}{a} x = \frac{c}{a}$, oder $x^2 + \alpha x = \beta$ erhält, so sagt man, die Gleichung sei reducirt.

Diejenigen Werthe von x, welche die Gleichung zu einer identischen machen, heißen die Wurzeln der Gleichung; eine quadratische Gleichung auflösen, heißt daher ihre Wurzeln finden.

§. 224.

Setzt man in der rein quadratischen Gleichung $x^2 = a$ statt a lieber $(\sqrt{a})^2$ und reducirt sie dabei auf Null, so erhält man $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$, oder

$$(x + \sqrt{a}) \cdot (x - \sqrt{a}) = 0.$$

Ein Produkt wird aber zu Null, wenn ein Faktor gleich Null ist, und es zerfällt die Gleichung daher sofort in folgende beiden einfachen Gleichungen:

$$1)\ x + \sqrt{a} = 0 \text{ und } 2)\ x - \sqrt{a} = 0.$$

Aus Nr. 1. ergiebt sich $x = -\sqrt{a}$ und aus Nr. 2. $x = +\sqrt{a}$; so daß jede rein quadratische Gleichung jedesmal 2 Wurzeln hat, welche man gewöhnlich in eine Formel $x = \pm\sqrt{a}$ zusammenfaßt.

§. 225.

1) Die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 = a$, nämlich $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ sind beide verschieden, und zwar reell, wenn a eine absolute (positive) Zahl ist; sie sind imaginär, sobald a negativ ist, dagegen sind beide Wurzeln einander gleich, und zwar beide gleich Null, sobald $a =$ Null ist.

2) Hat die rein quadratische Gleichung die Form $ax^2 = b$, so braucht man nur beide Seiten durch a zu dividiren und erhält dann $x^2 = \frac{b}{a}$, also ist $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

§. 226.

Soll die unrein quadratische Gleichung $x^2 + ax = b$ aufgelöst werden, so mache man die linke Seite dadurch zu einem vollständigen Quadrat, daß man zu beiden Seiten $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ addirt, dann ist:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b, \text{ oder}$$
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $x + \frac{a}{2}$ rein quadratisch, und die Wurzeln derselben sind nach §. 224.

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}, \text{ woraus sich}$$
$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} \text{ ergiebt.}$$

Dies Resultat ist dem Gedächtniß als praktische Regel wohl einzuprägen.

§. 227.

1) Die beiden Werthe von x, welche die unrein quadratische Gleichung $x^2 + ax = b$ liefert, nämlich $-\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$ und $-\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$ sind beide verschieden und zwar reell, sobald $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$ eine absolute (positive) Zahl ist, sie sind imaginär,

sobald $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$ eine negative Zahl ist; dagegen sind beide Werthe von x einander gleich, und zwar gleich $-\frac{a}{2}$, sobald $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = 0$, also $a^2 = -4b$ ist.

2) Hat die unrein quadratische Gleichung die Form $ax^2 + bx = c$, so muß man sie erst reduciren, wodurch man $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$ erhält, folglich ist $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}$.

§. 228.

1) Jede höhere Gleichung von der Form $x^{2n} + ax^n = b$ kann wie eine unrein quadratische Gleichung aufgelöst werden, wenn man nicht x, sondern x^n als den Unbekannten ansieht. Denn setzt man z. B. $x^n = y$, so ist $x^{2n} = y^2$, und die Gleichung geht über in: $y^2 + ay = b$, woraus sich

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}, \text{ also}$$

$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}} \text{ ergiebt.}$$

2) Ebenso kann eine Gleichung von der Form $\sqrt[n]{x} + a\sqrt[2n]{x} = b$ dadurch aufgelöst werden, daß man $\sqrt[2n]{x} = z$ setzt, dann ist $\sqrt[n]{x} = z^2$, und die Gleichung geht über in:

$$z^2 + az = b, \text{ woraus sich}$$

$$z = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}, \text{ also}$$

$$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\right)^{2n} \text{ ergiebt.}$$

§. 229.

Bezeichnet man die beiden Wurzeln der unrein quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b$ mit x_1 und x_2, so ist

1) $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$ und

2) $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$; folglich, wenn man addirt, $x_1 + x_2 = -a$, oder $a = -(x_1 + x_2)$.

Der Coefficient von x ist mithin jedesmal gleich der Summe

der beiden Wurzeln, negativ genommen. Multiplicirt man aber die Gleichungen Nr. 1. und Nr. 2., so ergiebt sich:

$$x_1 \,.\, x_2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\right)^2, \text{ oder}$$

$$x_1 \,.\, x_2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - b, \text{ folglich ist:}$$

$$b = -x_1 \,.\, x_2.$$

Das Glied der Gleichung, welches x gar nicht enthält, ist daher allemal gleich dem negativen Produkt der beiden Wurzeln.

§. 230.

Es ist

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(x+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)$$

wovon man sich durch Ausführung der Multiplikation leicht überzeugen kann.

Setzt man aber $x^2 + ax + b = 0$ und löst diese unrein quadratische Gleichung nach x auf, so ist:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Hieraus folgt, daß man jeden Ausdruck von der Form $x^2 + ax + b$ in zwei Faktoren zerlegen kann, welche man findet, wenn man ihn gleich Null setzt, die beiden Wurzeln dieser Gleichung sucht und jede derselben von x subtrahirt, z. B.

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \,.\, (x - 3).$$

Anmerkung. 1) Macht man die Gleichung

A) $\sqrt{a+x} = x - b$

rational, so erhält man:

B) $x^2 - (2b+1)x = a - b^2$

Dieselbe quadratische Gleichung erhält man durch Rationalmachung von: C) $\sqrt{a+x} = b - x$.

Es folgt hieraus, daß die Endgleichung B allgemeiner ist, als die ursprünglichen Gleichungen A und C, weshalb auch nicht immer beide Wurzeln der Gleichung B einer jeden der beiden Gleichungen A und C genügen werden.

2) Die unrein quadratische Gleichung

$$x^2 + ax = b$$

kann man auch annäherungsweise durch die Theorie der Kettenbrüche auflösen. Da nämlich:

$x(a+x) = b$ ist, so folgt:

$$x = \frac{b}{a+x}.$$

Setzt man nun in diesem Bruch für das zweite Glied x des Nenners fortwährend den Werth $\frac{b}{a+x}$, so erhält man:

$$x = \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots\ldots}}}}$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch b, so ist

$$x = \cfrac{1}{\frac{a}{b} + \cfrac{1}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots\ldots}}}}$$

$$= \cfrac{1}{\frac{a}{b} + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\frac{a}{b} + \frac{1}{a} + \ldots}}}$$

Setzt man $\frac{a}{b} = c$, so ergiebt sich für x der periodische Kettenbruch

$$x = \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \ldots\ldots}}}}$$

von welchem man beliebig viel Näherungswerthe entwickeln kann.

Bezeichnet man die auf diese Art gefundene Wurzel mit x_1, so ergiebt sich der Werth der zweiten Wurzel x_2 aus der Gleichung

$$x_1 \cdot x_2 = -b.$$

§. 231.

Sollen Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten aufgelöst werden, so kann dies wie bei den einfachen Gleichungen durch Anwendung der drei im §. 218. angegebenen Methoden geschehen. Dabei suche man es aber zu vermeiden, Gleichungen zu erhalten, welche den Unbekannten in höheren Potenzen enthalten, oder in welchen Produkte vorkommen, die mehr als zwei Unbekannte zu Faktoren haben, weil sich solche Gleichungen in den meisten Fällen gar nicht auflösen lassen. Man entwickele dann nicht die Unbekannten selbst, sondern zunächst zusammengesetzte Ausdrücke, z. B. die Summe, Differenz, das Produkt, den Quotient der Unbekannten und leite aus diesen erst die

Unbekannten selbst ab, wozu sich die folgenden Gesetze mit Vortheil benutzen lassen:

1) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$.
2) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$.
3) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.
4) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x - y)^2 + 2xy$.
5) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.
6) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
7) $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$.
8) $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$.
9) $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$.
$= (x - y)^2 + 3xy$.
10) $x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$.
$= (x - y)^2 + xy$.
11) $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$.
$= x^2 + y^2 - (x - y)^2$.
12) $xy = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4}$.

Beispiele.

I. Gegeben $\begin{cases} 1)\ x^2 + y^2 = a \\ 2)\ xy = b. \end{cases}$

Man multiplicire Nr. 2. mit 2 und addire sie dann zu Nr. 1., dann erhält man:

$x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b$, oder
$(x + y)^2 = a + 2b$, mithin ist
$x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$. (A.

Multiplicirt man Nr. 2. mit 2 und subtrahirt sie dann von Nr. 1., so findet man $x - y$, nämlich:

$x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b$, oder
$(x - y)^2 = a - 2b$, folglich ist
$x - y = \pm\sqrt{a - 2b}$. (B.

Aus A und B ergiebt sich aber sogleich durch Anwendung der Additions- und Subtraktions-Methode:

$x = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b})$ und
$y = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b})$.

Dieselben Resultate hätte man aber auch auf dem gewöhnlichen Wege durch Anwendung der Substitutions-Methode gefunden, wobei man jedoch auf eine Gleichung vom vierten Grade gekommen wäre, die sich nach §. 228. Nr. 1. auflösen läßt. Denn es ist:

y aus Nr. 2) $y = \frac{b}{x}$

$$y \text{ in Nr. 1) } x^2 + \frac{b^2}{x^2} = a$$
$$x^4 + b^2 = ax^2$$
$$x^4 - ax^2 = - b^2$$
$$x^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}, \text{ folglich}$$
$$x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}}.$$
$$x \text{ in 1) } \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} + y^2 = a$$
$$y = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}}.$$

Diese Resultate scheinen nicht mit den oben gefundenen übereinzustimmen, wendet man aber auf dieselben die Formel des §. 176. an, so ergiebt sich die Gleichheit sofort.

II. Gegeben $\begin{cases} 1)\ x + y = 14. \\ 2)\ xy = 48. \end{cases}$

Nach dem oben angeführten Gesetz Nr. 8. ist $x - y = \pm\sqrt{(x+y)^2 - 4xy}$, also hier

$$x - y = \pm\sqrt{14^2 - 4 \,.\, 48}, \text{ oder}$$
$$x - y = \pm\sqrt{4}, \text{ oder}$$
$$x - y = \pm 2.$$

In Verbindung mit Gleichung Nr. 1. erhält man durch Anwendung der Additions- und Subtraktions-Methode $x_1 = 8$, $y_1 = 6$, und $x_2 = 6$, $y_2 = 8$.

III. Gegeben $\begin{cases} 1)\ x + y = a. \ ^{*)} \\ 2)\ x^2 + y^2 = b. \end{cases}$

Nach Gesetz Nr. 11. ist $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$, also ist hier
$$2xy = a^2 - b.$$

Durch Subtraktion von Gleichung Nr. 2. erhält man
$$x^2 + y^2 - 2xy = b - (a^2 - b), \text{ oder}$$
$$(x - y)^2 = 2b - a^2, \text{ also}$$
$$x - y = \pm\sqrt{2b - a^2},$$
woraus sich mit Benutzung von Nr. 1. leicht x und y ergeben.

IV. Gegeben $\begin{cases} 1)\ x + \sqrt{xy} + y = 14. \\ 2)\ x^2 + xy + y^2 = 84. \end{cases}$

Nach Gesetz Nr. 9. ist $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$, also ist auch
$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - (\sqrt{xy})^2$$
$$= (x + y + \sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}).$$

*) Man achte darauf, daß bei den Beispielen I, II und III x und y vertauscht werden können, und daß man in Folge dessen bei I und III für jeden Unbekannten vier, bei II. für jeden zwei Werthe erhält.

Folglich ist hier 14. $(x+y-\sqrt{xy}) = 84$,

$$x+y-\sqrt{xy} = 6,$$
$$x+y+\sqrt{xy} = 14 \text{ nach Gleichung Nr. 1.}$$

Mithin ist $2(x+y) = 20$, und $2\sqrt{xy} = 8$, also

$$x+y = 10 \text{ und } xy = 16,$$

wodurch die Aufgabe auf Beispiel Nr. II. reducirt ist.

V. Gegeben $\begin{cases} 1) \ \dfrac{x^3-y^3}{61} = (x-y)^3. \\ 2) \ xy = 20. \end{cases}$

Durch Anwendung des Gesetzes Nr. 4. erhält man:

A. $\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{61} = (x-y)(x-y)^2.$

Dividirt man beide Seiten durch $x-y$, so entsteht

$$\frac{x^2+xy+y^2}{61} = \frac{(x-y)^2}{1}.$$

Aus mehreren gleichen Quotienten kann man nach §. 39. einen Quotienten bilden, welcher diesen gleich ist, indem man die Summe oder Differenz der Dividenden durch die Summe oder Differenz der Divisoren dividirt.

Jeder dieser Quotienten ist mithin gleich $\dfrac{x^2+xy+y^2-(x-y)^2}{61-1}$, oder nach Gesetz Nr. 9. gleich $\dfrac{3xy}{60} = 1$. Daher ist $(x-y)^2 = 1$, also $x-y = \pm 1$. Nun ist nach Gesetz Nr. 7. $x+y = \pm\sqrt{(x-y)^2+4xy} = \pm\sqrt{1+80} = \pm 9$ u. s. w.

Die Gleichung A ist durch $x-y$ dividirt worden, folglich kann auch $x-y=0$ sein, da Produkte, in welchen ein Faktor $=0$ ist, selbst gleich 0, also einander gleich sein müssen. Es folgt dann aus Nr. 2 $x = y = 2\sqrt{5}$, welche Werthe sonst verloren gegangen sein würden.

VI. Gegeben $\begin{cases} 1) \ x^2+y^2+x-y = a. \\ 2) \ (x^2+y^2)(x-y) = b. \end{cases}$

Setzt man in Gesetz Nr. 8. x^2+y^2 an die Stelle von x, und $x-y$ an die Stelle von y, so erhält man:

$[x^2+y^2-(x-y)]^2 = (x^2+y^2+x-y)^2 - 4(x^2+y^2)(x-y)$, also ist

$$x^2+y^2-(x-y) = \pm\sqrt{a^2-4b}.$$

Durch Addition und Subtraktion dieser Gleichung mit Nr. 1. ergiebt sich

$$x^2+y^2 = \tfrac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2-4b})$$
$$x-y = \tfrac{1}{2}(a \mp \sqrt{a^2-4b}),$$

welche beiden Gleichungen sich nach Analogie des Beispiels Nr. III. leicht lösen lassen.

VII. Gegeben $\begin{cases} 1) \; ax - by = c \\ 2) \; a^3x^3 - b^3y^3 = dxy. \end{cases}$

Potenzirt man Nr. 1. mit 3, so erhält man:

$$a^3x^3 - 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 - b^3y^3 = c^3.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von Nr. 2., so entsteht

$$3a^2bx^2y - 3ab^2xy^2 = dxy - c^3, \text{ oder}$$

$$3abxy(ax - by) = dxy - c^3,$$

und weil nach Nr. 1. $ax - by = c$ ist,

$$3abcxy = dxy - c^3.$$

Hieraus findet man

$$xy = \frac{c^3}{d - 3abc}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 4ab, quadrirt Nr. 1. und addirt beide, so ergiebt sich

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + 4abxy = c^2 + \frac{4abc^3}{d - 3abc}, \text{ oder}$$

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = c^2 + \frac{4abc^3}{d - 3abc}, \text{ mithin ist}$$

$$ax + by = \pm\sqrt{c^2 + \frac{4abc^3}{d - 3abc}} = \pm c \,.\, \sqrt{\frac{d + abc}{d - 3abc}}.$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit Nr. 1. ergeben sich nun leicht die Werthe von x und y.

VIII. Gegeben $\begin{cases} 1) \; \dfrac{xyz}{x + y} = a \\ 2) \; \dfrac{xyz}{y + z} = b \\ 3) \; \dfrac{xyz}{x + z} = c. \end{cases}$

Aus den gegebenen Gleichungen ergeben sich, wenn man Quotient und Divisor vertauscht:

$$\text{A)} \; \frac{xyz}{a} = x + y$$

$$\text{B)} \; \frac{xyz}{b} = y + z$$

$$\text{C)} \; \frac{xyz}{c} = x + z.$$

Addirt man diese Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\text{D)} \; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) xyz = x + y + z.$$

Subtrahirt man hiervon jede der Gleichungen A, B und C, so ist:

$$\text{E)} \; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) xyz = z$$

$$\text{F)} \; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) xyx = x$$

$$\text{G)} \; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) xyz = y; \text{ oder:}$$

$$\text{H)}\quad xy = \frac{2abc}{ab + ac - bc}$$

$$\text{I)}\quad yz = \frac{2abc}{ab + bc - ac}$$

$$\text{K)}\quad xz = \frac{2abc}{ac + bc - ab}.$$

Wenn man endlich je 2 der Gleichungen H, I, K mit einander multiplicirt und das Produkt durch die dritte dividirt, so erhält man:

$$x = \pm \sqrt{\frac{2abc\,(ab + bc - ac)}{(ac + ab - bc)\,(ac - ab + bc)}}.$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2abc\,(ac + bc - ab)}{(ab + ac - bc)\,(ab - ac + bc)}}.$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{2abc\,(ab + ac - bc)}{(bc + ab - ac)\,(bc - ab + ac)}}.$$

Viertes Kapitel.

Von den Proportionen.

§. 232.

Eine Gleichung zwischen zwei Differenzen, z. B. $a - b = c - d$, nennt man eine **arithmetische Proportion** und liest sie auch folgendermaßen: „**a verhält sich arithmetisch zu b wie c zu d**". Jede Seite dieser Gleichung heißt auch ein **arithmetisches Verhältniß**.

Eine arithmetische Proportion enthält also immer 4 Glieder; man nennt a und d **äußere**, b und c **innere Glieder**, a und b **Glieder des ersten**, c und d **Glieder des zweiten Verhältnisses**, a und c **homologe vordere**, b und d **homologe hintere Glieder**.

Sind die beiden mittleren Glieder gleich, so heißt die Proportion **stetig**, z. B. $a - b = b - d$; das mittlere Glied wird dann das **arithmetische Mittel** der beiden äußeren Glieder genannt.

§. 233.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der inneren Glieder.

Beweis. Ist $a - b = c - d$, so addire man zu beiden Seiten der Gleichung $b + d$, und man erhält $a + d = b + c$.

§. 234.

Ist eine arithmetische Proportion stetig, z. B. $a - x = x - b$, so ist nach §. 233., $2x = a + b$, also $x = \frac{a+b}{2}$. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist also stets gleich der halben Summe derselben.

Die Bezeichnung arithmetisches Mittel dehnt man auch auf eine beliebige Anzahl von Zahlen aus, indem der Quotient $\frac{a+b+c+\ldots p}{n}$ das arithmetische Mittel der n Zahlen a, b, c .... p genannt wird.

§. 235.

Eine Gleichung zwischen zwei Quotienten, z. B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, oder $a:b = c:d$, nennt man eine geometrische Proportion oder kurzweg eine Proportion; eine Gleichung zwischen mehreren Quotienten, z. B. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}$ .... heißt eine laufende Proportion. Die Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ wird gelesen: „a verhält sich zu b, wie c zu d", und nennt man jeden dieser gleichen Quotienten ein geometrisches Verhältniß.

Die im §. 232. für die Glieder arithmethischer Proportionen angegebenen Benennungen gelten auch hier, nur nennt man das innere Glied einer stetigen Proportion die mittlere Proportionale.

Oft werden die laufenden Proportionen, z. B. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}$ .... auch so geschrieben: $x:y:z:u \ldots = a:b:c:d \ldots$ und ausgesprochen: „x verhält sich zu y zu z zu u u. s. w. wie a zu b zu c zu d u. s. w., wobei die zwischen den einzelnen Gliedern stehenden Zeichen (:) aber durchaus nicht als Divisionszeichen angesehen werden dürfen.

§. 236.

Multiplicirt man in $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ beide Seiten der Gleichung mit bd, so erhält man:

$$ad = bc; \text{ d. h.}$$

Jn jeder Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkt der inneren Glieder.

Umgekehrt folgt aus $ad = bc$ die Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, d. h. Aus zwei gleichen Produkten kann man immer eine Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produkts zu äußeren und die des anderen zu inneren Gliedern nimmt.

§. 237.

In jeder Proportion, z. B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lassen sich die inneren Glieder untereinander und auch die äußeren gegenseitig vertauschen, weil dadurch die Gleichung $ad = bc$ nicht geändert wird. Man kann daher jede Proportion in acht Umstellungen schreiben, nämlich

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
3) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
4) $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$
5) $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$
6) $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$
7) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
8) $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Aus jeder dieser Proportionen ergiebt sich $ad = bc$, wenn man beide Seiten der Gleichung mit dem Produkt der Nenner multiplicirt.

§. 238.

Jedes äußere Glied einer Proportion ist gleich dem Produkt der beiden inneren Glieder, dividirt durch das andere äußere; und jedes innere ist gleich dem Produkt der beiden äußeren Glieder, dividirt durch das andere innere Glied.

Beweis. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist nach §. 236., $ad = bc$; dividirt man diese Gleichung der Reihe nach durch d, c, b und a, so erhält man:

$$a = \frac{bc}{d}, \quad b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b} \text{ und } d = \frac{bc}{a}.$$

§. 239.

Sind von zwei Proportionen drei Glieder, welche gleiche

Stellen einnehmen, einzeln gleich, so sind auch die vierten Glieder einander gleich.

Beweis. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$ und

$\frac{a}{b} = \frac{y}{d}$ ist, so folgt aus §. 238, daß sowohl

x, als auch $y = \frac{bd}{a}$ ist, also $x = y$.

§. 240.

In jeder Proportion kann man die Glieder eines Verhältnisses oder ein paar homologe Glieder, kurz ein inneres und ein äußeres Glied, mit ein und derselben Zahl multipliciren oder dividiren, ohne die Richtigkeit der Proportion aufzuheben.

Beweis. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist,

so muß nach §. 36. auch $\frac{an}{bn}$ und $\frac{a:n}{b:n} = \frac{c}{d}$, sowie $\frac{cn}{dn}$ und $\frac{c:n}{d:n} = \frac{a}{b}$ sein.

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, so folgt ferner aus §. 26. Nr. 3. in Verbindung mit §. 34. Nr. 2., daß $\frac{an}{b} = \frac{cn}{d}$ und $\frac{a}{b:n} = \frac{c}{d:n}$ und aus §. 33. in Verbindung mit §. 34. Nr. 3.

$$\frac{a:n}{b} = \frac{c:n}{d} \text{ und } \frac{a}{bn} = \frac{c}{dn} \text{ ist.}$$

§. 241.

Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dann ist nach §. 39.

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$, und da auch $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ist,

2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$.

Hieraus ergeben sich folgende Gesetze: In jeder Proportion verhält sich:

1) Die Summe oder Differenz der homologen vorderen Glieder zur Summe oder Differenz der homologen hinteren Glieder wie die Glieder eines Verhältnisses.
2) Die Summe oder Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe oder Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses wie ein paar homologe Glieder.

3) Die Summe der homologen vorderen Glieder zur Summe der homologen hinteren Glieder wie die entsprechenden Differenzen.

4) Die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses wie die entsprechenden Differenzen.

Durch Anwendung dieser Gesetze kann man die in einer Proportion etwa vorkommende unbekannte Zahl x oft auf sehr einfache Weise finden, z. B.:

1) $\frac{a+x}{b} = \frac{x}{c}$

$\frac{a+x-x}{b-c} = \frac{x}{c}$

$\frac{a}{b-c} = \frac{x}{c}$

$x = \frac{ac}{b-c}$.

2) $\frac{a+x}{b} = \frac{c-x}{d}$

$\frac{(a+x)+(c-x)}{b+d} = \frac{a+x}{b}$

$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a+x}{b}$

$a+x = \frac{b(a+c)}{b+d}$

$x = \frac{b(a+c)}{b+d} - a$.

§. 242.

Aus den beiden Proportionen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ entsteht durch Multiplikation

$\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$ und durch Division

$\frac{a:e}{b:f} = \frac{c:g}{d:h}$, d. h.

Wenn man diejenigen Glieder zweier Proportionen, welche in gleichen Stellen stehen, mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, so erhält man wieder eine richtige Proportion. Das Erstere wird das **Zusammensetzen** der Proportionen genannt und kann auch auf mehr als zwei Proportionen ausgedehnt werden.

§. 243.

Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$ und $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$; d. h.

Man kann alle Glieder einer Proportion mit ein und derselben Zahl potenziren oder durch dieselbe radiciren, ohne die Richtigkeit der Proportion zu stören.

§. 244.

Wenn $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} \ldots$, dann ist nach §. 39.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} \ldots = \frac{x \pm y \pm z \pm u \pm \ldots}{a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned}(x + y + z + u + \ldots) : (a + b + c + d + \ldots) &= x : a \\ &= y : b \\ &= z : c \\ &= u : d \text{ u. s. w., d. h.}\end{aligned}$$

In jeder laufenden Proportion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses wie irgend zwei entsprechende Glieder.

Man kann diesen Satz noch verallgemeinern, denn wenn

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} \ldots$ ist, so ist auch nach §. 39.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} \ldots = \frac{\alpha x \pm \beta y \pm \gamma z \pm \delta u \ldots}{\alpha a \pm \beta b \pm \gamma c \pm \delta d \ldots}$$

§. 245.

Soll eine gegebene Zahl A in mehrere Theile x, y, z, u ... getheilt werden, welche sich laufend wie die gegebenen Verhältnißzahlen a, b, c, d verhalten, so ist nach §. 244.

$$\frac{x + y + z + u \ldots}{a + b + c + d \ldots} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} \text{ u. s. w.}$$

Nun ist aber $x + y + z + u \ldots$ gleich der zu theilenden Zahl, also ist

$$\begin{aligned}\frac{A}{a + b + c + d \ldots} &= \frac{x}{a}, \text{ also ist } x = \frac{A}{a + b + c + d \ldots} \cdot a \\ &= \frac{y}{b}, \quad " \quad " \quad y = \frac{A}{a + b + c + d \ldots} \cdot b \\ &= \frac{z}{c}, \quad " \quad " \quad z = \frac{A}{a + b + c + d \ldots} \cdot c \\ &= \frac{u}{d}, \quad " \quad " \quad u = \frac{A}{a + b + c + d \ldots} \cdot d; \text{ d. h.}\end{aligned}$$

Man dividire die gegebene Zahl durch die Summe der Verhältnißzahlen und multiplicire diesen Quotienten nach und nach mit den einzelnen Verhältnißzahlen, so erhält man die denselben entsprechenden Theile.

§. 246.

Ist das Verhältniß der Theile nicht als ein laufendes gegeben, so kann man dasselbe allemal laufend machen, wenn nur zwischen n dergleichen Theilen n — 1 von einander unabhängige Proportionen gegeben sind. Es empfiehlt sich folgendes Verfahren:

Man giebt einem unbekannten Theile, und zwar am vortheilhaftesten demjenigen, welcher in den gegebenen Proportionen am häufigsten vorkommt, die Verhältnißzahl 1 und ermittelt, welche Verhältnißzahlen dann die anderen unbekannten haben müssen. Z. B.

Wenn x, y, z und v so bestimmt werden sollen, daß $x - 3y - 5z + 7v = 16$, ist und daß sich außerdem verhält:

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{8}$$
$$\frac{z}{v} = \frac{9}{10}$$
$$\frac{y}{v} = \frac{4}{5},$$

so gebe man y die Verhältnißzahl 1, dann folgt für x aus der ersten Proportion die Verhältnißzahl $\frac{7}{8}$, für v aus der dritten $\frac{5}{4}$; setzt man diese Verhältnißzahl in die zweite ein, so erhält man: die Verhältnißzahl von z verhält sich zu $\frac{5}{4} = 9$ zu 10, also ergiebt sich für z die Zahl $\frac{9}{8}$, und es verhält sich

$$x : y : z : v = \frac{7}{8} : 1 : \frac{9}{8} : \frac{5}{4}$$

oder, wenn man die Glieder des zweiten Verhältnisses mit 8 multiplicirt

$$= 7 : 8 : 9 : 10.$$

$$x : -3\,y : -5\,z : 7\,v = 7 : -24 : -45 : 70$$

$$x - 3\,y - 5\,z + 7\,v : 7 - 24 - 45 + 70 = x : 7 \quad x = 14$$
$$= 16 : 8 \qquad = y : 8 \quad y = 16$$
$$= 2 : 1 \qquad = z : 9 \quad z = 18$$
$$= v : 10 \quad v = 20.$$

Anmerkung. Bei Proportionen schreibt man die Glieder ohne Klammern, auch wenn sie zusammengesetzte Ausdrücke sind.

Fünftes Kapitel.

Von den logarithmischen Gleichungen.

§. 247.

Im siebenten Abschnitt ist gezeigt worden, wie zweckmäßig die Logarithmen zur Berechnung numerischer Ausdrücke angewendet werden können. Wenn sich daraus auch die außerordentliche Wichtigkeit der Logarithmen ergiebt, so folgt daraus doch nicht ihre unbedingte Nothwendigkeit, denn die dort gefundenen Resultate lassen sich auch auf einem anderen, wenn auch weitläuftigeren Wege finden. So kann man z. B. auf die im vierten Kapitel des sechsten Abschnitts angegebene Art nicht nur Quadrat- und Cubikwurzeln, sondern auch jede höhere Wurzel ausziehen.

Manche Untersuchungen führen aber zu einer Klasse von Gleichungen, deren Auflösung nur durch Anwendung der Logarithmen möglich ist; zu diesen gehören besonders diejenigen, in welchen der Unbekannte als Exponent oder unter dem logarithmischen Zeichen vorkommt, und welche mithin zu den transcendenten Gleichungen gerechnet werden müssen. Die ersteren werden Exponential-Gleichungen und beide zusammen logarithmische Gleichungen genannt.

§. 248.

Die einfachsten Exponential-Gleichungen sind diejenigen, welche sich auf die Form

$$A^x = B$$

bringen lassen, in welchen also jede Seite nach geschehener Reduktion nur aus einem einzigen Gliede besteht.

Nimmt man hier von beiden Seiten die Logarithmen aus demselben System, so erhält man

$$x \cdot \log A = \log B,$$

mithin ist $x = \frac{\log A}{\log B}$.

Beispiele. 1) $a^{3x} b^{2x-5} = c^{4x+3}$

$$3x \log a + (2x - 5) \log b = (4x + 3) \log c$$
$$3x \log a + 2x \log b - 5 \log b = 4x \log c + 3 \log c$$
$$x (3 \log a + 2 \log b - 4 \log c) = 3 \log c + 5 \log b$$
$$x = \frac{3 \log a + 2 \log b}{3 \log a + 2 \log b - 4 \log c}.$$

2) $a^x = \sqrt[x]{b}$

$$x \log a = \frac{1}{x} \log b$$

$$x^2 \log a = \log b$$

$$x^2 = \frac{\log b}{\log a}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\log b}{\log a}}.$$

3) $2^{3x} . 3^{2x-1} = 4 . 5^{3-x}$

$$3x \log 2 + (2x - 1) \log 3 = \log 4 + (3 - x) \log 5$$

$$3x \log 2 + 2x \log 3 - \log 3 = \log 4 + 3 \log 5 - x \log 5$$

$$x (3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5) = \log 4 + 3 \log 5 + \log 3$$

$$x = \frac{\log 4 + 3 \log 5 + \log 3}{3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 5},$$ woraus folgt

$$x = 1{,}242455.$$

§. 249.

Exponential-Gleichungen, deren Seiten mehrgliedrig sind, lassen im Allgemeinen keine elementare Auflösung zu, z. B. die Gleichungen:

$$1)\ a^x + b^x = c$$

$$2)\ a^{mx} + a^{nx} = b.$$

Oft wird man aber der Gleichung durch geschickte Umwandlung eine andere Form geben können, so daß sie sich auflösen läßt.

1) Ist z. B. die Gleichung $a^{2nx} + a^{nx} = b$ gegeben, so setze man y anstatt a^{nx} und sie geht über in $y^2 + y = b$, woraus sich

$$y = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + b}$$ ergiebt.

Mithin ist auch $a^{nx} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + b}$, welche Gleichung sich nach §. 248. auflösen läßt.

2) Häufig kann man die Gleichung auch passend in Faktoren zerlegen, z. B. die Gleichung $ab^x + c^{3x-2} = b^{x-1} + c^{3x}$.

Schafft man diejenigen Glieder, welche dieselben Dignanden haben, auf eine Seite, so ist

$$ab^x - b^{x-1} = c^{3x} - c^{3x-2}.$$

Trennt man auf jeder Seite die gemeinschaftlichen Faktoren heraus, so erhält man:

$$b^{x-1}(ab - 1) = c^{3x-2}(c^2 - 1),$$

welche Gleichung man nach §. 248. auflösen kann.

§. 250.

Befindet sich der Unbekannte x unter dem logarithmischen Zeichen, so kann man die Gleichung auf zwei verschiedene Arten auflösen.

a) Man suche durch Anwendung der im §. 191. mitgetheilten Gesetze die logarithmischen Zeichen fortzuschaffen, indem man jede Seite in einen einzigen Logarithmus verwandelt und die beiden Logarithmanden einander gleich setzt.

$$\text{z. B. } \log \sqrt[7]{\frac{3}{x^2}} - 1{,}94 = \log 2x^4 - 3{,}4.$$

$$3{,}4 - 1{,}94 = \log 2x^4 - \log \sqrt[7]{\frac{3}{x^2}}$$

$$1{,}46 = \log \frac{2x^4}{\sqrt[7]{\frac{3}{x^2}}}$$

$$\text{num} \log 1{,}46 = \frac{2x^4}{\sqrt[7]{\frac{3}{x^2}}}.$$

Nimmt man nun von beiden Seiten der Gleichung die Logarithmen, so erhält man:

$1{,}46 = \log 2 + 4 \log x - \frac{1}{7} \log 3 - \frac{2}{7} \log x$, woraus
$\log x = 0{,}2863304$ und
$x = 1{,}933438$ hervorgeht.

b) Man löse die Gleichung zuerst in Bezug auf log x auf und suche dann zu der gefundenen Zahl den Numerus.

Wendet man diese Methode auf dieselbe Gleichung an, nämlich:

$$\log \sqrt[7]{\frac{3}{x^2}} - 1{,}94 = \log 2x^4 - 3{,}4, \text{ so ist}$$

$\frac{1}{7} \log 3 - \frac{2}{7} \log x - 1{,}94 = \log 2 + 4 \log x - 3{,}4$ oder
$\log 3 - 2 \log x = 7 \log 2 + 28 \log x - 10{,}22$,
woraus dasselbe Resultat, nämlich $\log x = 0{,}2863304$ und
$x = 1{,}933438$ entsteht.

Anmerkung. Die zweite Methode läßt sich aber nicht immer anwenden, z. B. dann nicht, wenn einzelne der Logarithmanden negativ sind, z. B. $\log(-2x^3) + 1{,}5 = \log(-6x)$.

Hier muß die erstere Methode angewendet werden:

$$\log(-2x^3) - \log(-6x) = -1{,}5$$

$$\log \frac{-2x^3}{-6x} = -1{,}5.$$

$$\log \frac{x^2}{3} = 0{,}5 - 2$$

$0{,}5 - 2$ ist aber der Logarithmus von 0,03162277, mithin ist

$$\frac{x^2}{3} = 0{,}03162277, \text{ woraus}$$

$$x = \pm\sqrt{0{,}09486831} \text{ folgt.}$$

Auch läßt sich die zweite Methode nicht in Anwendung bringen, wenn einzelne Logarithmanden aus Summen oder Differenzen bestehen.

z. B. $\log(x+2) - 2\log x = 1$.

Die erste Methode liefert sofort:

$$\log \frac{x+2}{x^2} = 1, \text{ oder}$$

$$\frac{x+2}{x^2} = 10,$$

eine quadratische Gleichung, die sich ohne Anwendung der Logarithmen auflösen läßt.

Uebungen zum achten Abschnitt.

A. Gleichungen vom ersten Grade mit einem Unbekannten.

1. $3x - 4 = 2x - 1$. Aufl. $x = 3$.
2. $4x + 8 = 5x - 2$. Aufl. $x = 10$.
3. $\frac{3}{4}x + 1 = \frac{1}{4}x + 3$. Aufl. $x = 4$.
4. $2x - 9 = 7x - 34$. Aufl. $x = 5$.
5. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = \frac{5}{6}x - 3$. Aufl. $x = 12$.
6. $6x + 5 = 2x + 6\frac{1}{3}$. Aufl. $x = \frac{1}{3}$.
7. $8x + 1 = \frac{2x + 14\frac{1}{2}}{5}$. Aufl. $x = \frac{1}{4}$.
8. $x = 17 - \frac{23 + x}{7}$. Aufl. $x = 12$.
9. $2x = 23 - \frac{16 - x}{5}$. Aufl. $x = 11$.
10. $\frac{57 - 5x}{7} = x + 3$. Aufl. $x = 3$.
11. $\frac{2}{3}x - 1 = 1 + \frac{1}{2}x$. Aufl. $x = 12$.
12. $36x - 216 + 24x + 144 = 72x$. Aufl. $x = -6$.
13. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - 9 = \frac{1}{3}x - 8 - \frac{1}{6}x$. Aufl. $x = 12$.
14. $\frac{x}{7} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} - 11$. Aufl. $x = 70$.
15. $\frac{5x - 3}{4} = \frac{3x + 12}{7}$. Aufl. $x = 3$.
16. $\frac{1}{x - 3} = \frac{6}{x + 7}$. Aufl. $x = 5$.
17. $\frac{x - 1}{2} = \frac{x + 11}{5}$. Aufl. $x = 9$.
18. $\frac{10 - 3x}{2} = \frac{x + 4}{3}$. Aufl. $x = 2$.
19. $\frac{17 - x}{2} + x = \frac{33 - x}{3}$. Aufl. $x = 3$.
20. $\frac{13x - 20}{16} + x = 64 + \frac{36 - x}{10}$. Aufl. $x = 36$.

21. $3x + \frac{7x-2}{2} = 25 - \frac{2x-5}{3} + \frac{2x-1}{7}$. Aufl. $x = 4$.

22. $\frac{4x-3}{3} - \frac{x+4}{5} = \frac{8+3x}{2} - \frac{16x-11}{21}$. Aufl. $x = 16$.

23. $\frac{7x-15}{3} - \frac{2x-13}{5} = \frac{13x-24}{3} - \frac{9x-20}{4}$. Aufl. $x = 4$.

24. $\frac{7x-6}{2} - \frac{12x-14}{7} = \frac{9x-8}{5} - \frac{3x-16}{10} + 11$. Aufl. $x = 42$.

25. $\frac{3x+4}{7} - \frac{9x+44}{5} = \frac{5x+12}{3} - \frac{9x+30}{4}$. Aufl. $x = -6$.

26. $\frac{x-5}{2} - \frac{x-1}{3} - \frac{x-11}{4} = x - 8$. Aufl. $x = \frac{103}{13}$.

27. $\frac{10x+11}{6} - \frac{14x-13}{3} - \frac{7-6x}{4} = 4$. Aufl. $x = \frac{5}{18}$.

28. $12x + \frac{54x-1}{4} - \frac{16x-2}{5} = \frac{18x-1}{4} - \frac{22x-2}{3} + 21$. Aufl. $x = \frac{11}{13}$.

29. $\frac{3x-5}{8} + x^2 = 1 - \frac{1-2x^2}{2}$. Aufl. $x = 3$.

30. $0,5x + 2 - \frac{3}{4}x = 0,4x - 11$. Aufl. $x = 20$.

31. $1,111 - 0,1111x = 0,3333$. Aufl. $x = 7$.

32. $7,77 = 2,48x - 11,4996$. Aufl. $x = 7,77$.

33. $4,6x - 3,943 - 5,1x = 6,3 - 3,8x - 2,488$. Aufl. $x = 2,35$.

34. $0,855x - 14,4 - 5,7x = 36,4 - 3,45x - 68,377$. Aufl. $x = 12,6$.

35. $0,1602x - 11,4 - 1,34x = 14,3715 - 0,742x - 40$. Aufl. $x = 32,5$.

36. $2,1x - 0,8 = 8,49x + 68,04 - 51,3x - 0,084$. Aufl. $x = 1,53097\ldots$

37. $0,5x + 6,8 = 0,16x - 0,84 + 7,2x$. Aufl. $x = 1,113702\ldots$

38. $x + \frac{3}{4} - 0,6x + 3,5 + \frac{31}{4}x = 1,75x + 0,84 - 0,2x$.

Aufl. $x = -0,51\overline{6}$.

39. $\frac{0,36x - 3,4}{0,4x - 1,2} = 0,3$. Aufl. $x = 12,\overline{6}$.

40. $\frac{6,4x + 0,01}{0,12x + 0,02} = 8$. Aufl. $x = 0,02757$.

41. $94 - \frac{7x}{11} = \frac{3,67x}{3} + \frac{184,4}{33} - 4,07x$. Aufl. $x = -40$.

42. $6x - 6[5 - 4x - (3 - 4,25x)] = 59,5$. Aufl. $x = 13$.

43. $9x - 2a = 5x - 2b$. Aufl. $x = \frac{1}{2}(a - b)$.

44. $5ax - 8b = ax - 4bx$. Aufl. $x = \frac{2b}{a+b}$.

45. $\frac{x-a}{3x-b} = 1$. Aufl. $x = \frac{1}{2}(b - a)$.

46. $\frac{2}{x+a} = \frac{1}{x-2b}$. Aufl. $x = a + 4b$.

47. $\frac{x}{b} - \frac{x}{a} = 1$. Aufl. $x = \frac{ab}{a-b}$.

48. $2ax + b = bx + 2a$. Aufl. $x = 1$.

49. $(x-a)b+c=(g-2x)d+c$. Aufl. $x=\frac{ab+dg}{b+2d}$.

50. $\frac{ax+b}{c}+a=\frac{ac+x}{c}$. Aufl. $x=\frac{b}{1-a}$.

51. $ax-\frac{3a-bx}{2}=\frac{1}{2}$. Aufl. $x=\frac{3a+1}{2a+b}$.

52. $(a-x)(b-x)=x^2$. Aufl. $x=\frac{ab}{a+b}$.

53. $(a-x)(a+x)=2a^2+2ax-x^2$. Aufl. $x=-\frac{1}{2}a$.

54. $(a^2+x)^2=x^2+4a^2+a^4$. Aufl. $x=2$.

55. $(a^2+x)(a^2-x)=a^4+2ax-x^2$. Aufl. $x=0$.

56. $(x-a)^2-(x+b)^2=2ab-2b^2$. Aufl. $x=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$.

57. $(a-b)(ax-b)=(a+b)(a+bx)$. Aufl. $x=\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-2ab-b^2}$.

58. $\frac{a^2}{bx}=\frac{b^2}{ax}+a-b$. Aufl. $x=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}$.

59. $\frac{x-a}{b}=\frac{x+b}{a}$. Aufl. $x=\frac{a^2+b^2}{a-b}$.

60. $\frac{x-a}{x-b}=\frac{x-b}{x+a}$. Aufl. $x=\frac{a^2+b^2}{2b}$.

61. $\frac{x+a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{x-b}{a}-\frac{a}{b}$. Aufl. $x=\frac{2a^2}{b-a}$.

62. $\frac{x}{a}-b=\frac{c}{d}-x$. Aufl. $x=\frac{abd+ac}{ad+d}$.

63. $am-b-\frac{ax}{b}+\frac{x}{m}=0$. Aufl. $x=bm$.

64. $\frac{3ax-2b}{3b}-\frac{ax-a}{2b}=\frac{ax}{b}-\frac{2}{3}$. Aufl. $x=1$.

65. $\frac{x-a}{b}-\frac{b-x}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$. Aufl. $x=\frac{2(a^2+b^2)}{a+b}$.

66. $\frac{bx}{a}-\frac{ax+a^2}{b}=\frac{a^2-2b^2}{a}$. Aufl. $x=-\frac{a^2+2ab+2b^2}{a+b}$.

67. $\frac{x}{a}-\frac{a-x}{b}+\frac{b(a-x)}{ac}=1$. Aufl. $x=a$.

68. $\frac{a-x}{b}-\frac{b-x}{a}-\frac{x-c}{c}=3$. Aufl. $x=\frac{(a^2-2ab-b^2).c}{ab+ac-bc}$.

69. $\frac{a^2-x}{b}-\frac{ab-x}{c}+\frac{c^2-x}{a}+\frac{a^2b+cx}{ab}=\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{a}$. Aufl. $x=\frac{a^2b}{a-c}$.

70. $\frac{ab+x}{b^2}-\frac{b^2-ax}{a^2b}=\frac{x-b}{a^2}-\frac{ab-x}{b^2}-1+\frac{3a}{b}$. Aufl. $x=a^2$.

71. $\frac{ax-bc}{ab}-\frac{bx-ac}{c^2}=\frac{cx-b^2}{bc}-\frac{x-a}{c}+1-\frac{x}{a}$. Aufl. $x=c$.

72. $\frac{b+c}{x} + a = \frac{a}{x} - b + \frac{a^2 - a - b^2 + b + c}{x}$. Aufl. $x = a - b$.

73. $\frac{a^2}{b}(x - a) - b(x - 2a) = \frac{b^2}{a}(x - a) - a(x - a - b)$. Aufl. $x = a$.

74. $ax - \frac{bx+1}{x} = \frac{a(x^2-1)}{x}$. Aufl. $x = \frac{1}{b}(a - 1)$.

75. $\frac{x^2 - a}{bx} - \frac{a - x}{b} = \frac{2x}{b} - \frac{a}{x}$. Aufl. $x = b - 1$.

76. $\frac{3}{c} - \frac{ab - x^2}{bx} = \frac{4x - ac}{cx}$. Aufl. $x = \frac{b}{c}$.

77. $a^2b - \frac{a+x}{b} = ab^2 - \frac{b+x}{a}$. Aufl. $x = a^2b^2 - a - b$.

78. $\frac{a-b}{bx} - \frac{a}{b} = -\frac{a+bx}{bx} - 1$. Aufl. $x = \frac{2a - b}{a - 2b}$.

79. $\frac{6,843x}{a} + 0,43b - 0,84x = \frac{ab - 0,84}{a}$. Aufl. $x = \frac{0,57ab - 0,84}{6,843 - 0,84a}$.

80. $\frac{3}{8}x - \frac{0,25x}{0,4} + 3,642 - \frac{ax}{0,8c} + 0,01 = 0$. Aufl. $x = \frac{14,608 \cdot c}{5a + c}$.

81. $\frac{(bd+1)x}{bd} + \frac{3x}{bc^2} - \frac{0,6x}{cd^2} - \frac{x}{bd} = x + 0,84$. Aufl. $x = \frac{0,28bc^2d^2}{d^2 - 0,2bc}$.

82. $\frac{a + 2x}{3a} - \frac{5a - 3x}{3} + 4 - \frac{8x}{5} = \frac{x}{1,5a} + \frac{x}{1,05}$. Aufl. $x = \frac{91 - 35a}{32,6}$.

83. $\frac{2x+3}{9} + \frac{7x-58}{5x-24} = \frac{4x+19}{18}$. Aufl. $x = 12$.

84. $\frac{16x+39}{24} - \frac{x-14}{9x-159} = \frac{2x+5}{3}$. Aufl. $x = 15$.

85. $\frac{9x-5}{5x-53} + \frac{4x-23}{51} = \frac{5x+27}{17} - \frac{11x+2}{51}$. Aufl. $x = 101$.

86. $\frac{19+12x}{6} + \frac{(x+1)(19-10x)}{9-5x} = \frac{18,5+12x}{3}$. Aufl. $x = 1\frac{1}{3}$.

87. $\frac{x+2}{20-x} = \frac{x+20}{46-x}$. Aufl. $x = 7$.

88. $8x - 28 = (4x+21)\frac{6x-22}{3x+14}$. Aufl. $x = 7$.

89. $\frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2x-12}{x-8} = \frac{7}{8} + \frac{10x-78}{3x-24}$. Aufl. $x = 12$.

90. $\frac{2x-3}{2x-4} - \frac{1}{2} = \frac{x+5}{3x-6}$. Aufl. $x = 13$.

91. $\frac{5x+14}{3x+8} + \frac{3,5x+3}{2x+5} = \frac{41}{12}$. Aufl. $x = -\frac{512}{191}$.

92. $\frac{6}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} + \frac{x^2}{x^2-4} = 0$. Aufl. $x = 8$.

93. $\frac{2x}{1-x} - \frac{1+6x}{1-3x} = 1 + \frac{1+2x}{2(1-x)}$. Aufl. $x = 1\frac{2}{3}$.

94. $\frac{1+x}{3-x} - \frac{1+3x}{5-3x} = 5 - \frac{12-5x}{3-x}$. Aufl. $x = 4\frac{1}{3}$.

95. $\frac{2x^2+3x}{2x-1} - 1 = \frac{10x^2-4}{6x-3} + \frac{1-2x}{3}$. Aufl. $x = 8$.

96. $\frac{x-2}{3x+2} + \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{4}{3}$. Aufl. $x = -\frac{10}{17}$.

97. $\frac{9x+5}{6(x-1)} = \frac{15x-7}{9(x+1)} - \frac{3x^2-51x-71}{18x^2-18}$. Aufl. $x = 2$.

98. $\frac{5x+4}{2x-4} = \frac{8x+10}{3x+12} + \frac{7x^2+6x+8}{2(x^2+2x-8)} - \frac{4}{3}$. Aufl. $x = 5\frac{6}{7}$.

99. $\frac{2x^2}{2x-1} - 1 - \frac{1-2x}{3} = \frac{3\frac{1}{3}x^2}{2x-1} - \frac{1{,}5x}{x-0{,}5} - \frac{4}{6x-3}$. Aufl. $x = 8$.

100. $\frac{(a+b)x}{b} - \frac{b^2}{a+b} = a - b + \frac{bx}{a+b}$. Aufl. $x = \frac{ab}{a+2b}$.

101. $\frac{a}{b} + \frac{a}{a-x} = \frac{b}{a} + \frac{b}{a-x}$. Aufl. $x = \frac{a(a+2b)}{a+b}$.

102. $\frac{x-2a}{x+3a} + \frac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2} = 3$. Aufl. $x = 4a$.

103. $\frac{ab}{x-a} + \frac{ax}{x+b} + \frac{bx^2}{x^2-a^2} = \frac{(a+b)(abx+bx^2+x^3)}{(x^2-a^2)(x+b)}$. Aufl. $x = \frac{b^2}{a}$.

104. $\frac{a^2-3bx}{a^2+3bx} + \frac{b^2+2ax}{b^2-2ax} = 2$. Aufl. $x = \frac{3b^3-2a^3}{12ab}$.

105. $\frac{a^2+x}{b^2-x} - \frac{a^2-x}{b^2+x} = \frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$. Aufl. $x = \frac{a+b}{a-b}$.

106. $\frac{3a-4x}{2ax-3x^2} + \frac{5a+3x}{3ax+2x^2} = \frac{17a}{6x}$. Aufl. $x = 2{,}4a$.

107. $\frac{3a}{a+2x} + \frac{2b}{2a+x} + \frac{2x^2-2a^2-10ab+8b^2}{(a+2x)(2a+x)} = 1$. Aufl. $x = a - 2b$.

108. $\frac{2a^2b^3}{(a+b)^3} - \frac{b^2x}{a^2+ab} + \frac{3a^2c}{a+b} = \frac{3acx}{b} - \frac{b^3-2ab^2x}{(a+b)^2}$. Aufl. $x = \frac{ab}{a+b}$.

109. $\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}$. Aufl. $x = \frac{ab}{a+b}$.

110. $\frac{bx}{2b-a} - \frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)} - \frac{5ab}{3c-d} = \frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)} - \frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$.

Aufl. $x = \frac{5a(2b-a)}{3c-d}$.

111. $x\sqrt{5} = x + 4$. Aufl. $x = 1 + \sqrt{5}$.

112. $x\sqrt{a} = x + b$. Aufl. $x = \frac{b(1+\sqrt{a})}{a-1}$.

113. $x\sqrt{a} = x - 1 + a$. Aufl. $x = 1 + \sqrt{a}$.

114. $x\sqrt{3} - 2 = x\sqrt{2} + 1$. Aufl. $x = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

115. $x\sqrt{5} - 2 = 2x + \sqrt{5}$. Aufl. $x = 9 + 4\sqrt{5}$.

116. $x - 1 = \frac{x}{2}\sqrt{3}$. Aufl. $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

117. $\frac{x\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = x$. Aufl. $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

118. $\frac{x - 1}{\sqrt{2}} = \frac{x + 1}{\sqrt{3}}$. Aufl. $x = 5 + 2\sqrt{6}$.

119. $\frac{x - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = x$. Aufl. $x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{ab}}{1 - b}$.

120. $\frac{x - \sqrt{a}}{x\sqrt{a}} = \sqrt{b}$. Aufl. $x = \frac{a\sqrt{b} + \sqrt{a}}{1 - ab}$.

121. $x\sqrt{a} - \sqrt{b} = x\sqrt{b} + \sqrt{a}$. Aufl. $x = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{a - b}$.

122. $\frac{x\sqrt{a} - b}{\sqrt{b}} = \frac{x\sqrt{b} + a}{\sqrt{a}}$. Aufl. $x = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{a - b}$.

123. $\frac{x + a}{\sqrt{a}} = \frac{x + b}{\sqrt{b}}$. Aufl. $x = \sqrt{ab}$.

124. $ax\sqrt{b} + ab^2 = bx\sqrt{a} + a^2b$. Aufl. $x = a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

125. $\frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$. Aufl. $x = -\frac{2\sqrt{6} + \sqrt{3}}{3}$.

126. $\frac{x\sqrt{a-b} - \sqrt{a+b}}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{3}}$. Aufl. $x = \frac{2b\sqrt{6} + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - 5b}$.

127. $\frac{x - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{x - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} = 2$. Aufl. $x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

128. $\frac{2x - a}{a - x} = \sqrt{2}$. Aufl. $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

129. $\frac{x - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{x - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{a - b}{\sqrt{ab}}$. Aufl. $x = 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

130. $\frac{x + 1}{\sqrt{2}} = x - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Aufl. $x = 2 + 2\sqrt{2}$.

131. $\frac{2x - 3\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} + \frac{3x - 2\sqrt{b}}{3\sqrt{a}} + \frac{8a + 5b}{6\sqrt{ab}} = 0$. Aufl. $x = \frac{1}{6}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

132. $\frac{x + \sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{x - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}$. Aufl. $x = \frac{2a(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{b - a}$.

133. $\frac{1 - x\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{x\sqrt{b} - 1}{\sqrt{a}} = \frac{ax + bx}{\sqrt{ab}}$. Aufl. $x = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2(a + b)}$.

134. $3\sqrt{x} - 1 = 2\sqrt{x} + 3$. Aufl. $x = 16$.

135. $\sqrt{12 + x} = 2 + \sqrt{x}$. Aufl. $x = 4$.

136. $a\sqrt{x} - b = b\sqrt{x} + a$. Aufl. $x = \left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2$.

137. $\sqrt{x+a+8b} = 3\sqrt{x+b}$. Aufl. $x = \frac{1}{8}(a-b)$.

138. $\sqrt{a^2+x} = b+\sqrt{x}$. Aufl. $x = \left(\frac{a^2-b^2}{2b}\right)^2$.

139. $\frac{6+\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} = 3$. Aufl. $x = 9$.

140. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = a$. Aufl. $x = a\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$.

141. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{b}+\sqrt{a}}$. Aufl. $x = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

142. $\frac{\sqrt{x}-a\sqrt{b}}{\sqrt{x}-b\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Aufl. $x = (a\sqrt{b}+b\sqrt{a})^2$.

143. $\sqrt{ax}+\sqrt{bx} = a-b$. Aufl. $x = a+b-2\sqrt{ab}$.

144. $\sqrt{3x}+\sqrt{x} = 2$. Aufl. $x = 4-2\sqrt{3}$.

145. $\sqrt{x} = 6-\frac{1}{2}\sqrt{2x}$. Aufl. $x = 72(3-2\sqrt{2})$.

146. $\sqrt{2x}+\sqrt{3x}-2\sqrt{6} = \sqrt{5x}$. Aufl. $x = (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$.

147. $\sqrt{4\sqrt{\sqrt{3x}+\sqrt{2}}}-2\sqrt{15}+\sqrt{3} = \sqrt{5}$. Aufl. $x = 6-\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

148. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{x} = 6$. Aufl. $x = 252-110\sqrt{2}$.

149. $\sqrt[3]{3\sqrt{2x+3}-11\sqrt{2}}+\sqrt{2} = \sqrt{3}$. Aufl. $x = 12$.

150. $\frac{28+\sqrt{x-3}}{4+\sqrt{x-3}} = \frac{38+\sqrt{x-3}}{6+\sqrt{x-3}}$. Aufl. $x = 7$.

151. $\frac{4x-9}{2\sqrt{x}-3} = 16+\frac{47-13\sqrt{x}}{31}$. Aufl. $x = 36$.

152. $\sqrt{a+x}-\sqrt{x} = \frac{4a}{\sqrt{a+x}}$. Aufl. $x = \frac{9}{7}a$.

153. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+2}+\frac{1}{\sqrt{8x+7}} = 0$. Aufl. $x = -1$.

154. $\sqrt{x+5} = 5-\sqrt{x}$. Aufl. $x = 4$.

155. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+12} = 9$. Aufl. $x = 13$.

156. $\sqrt{a+x} = \sqrt{b+4x}-\sqrt{x}$. Aufl. $x = \frac{(a-b)^2}{4(2a-b)}$.

157. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} = \sqrt{a}+\sqrt{a-2}$. Aufl. $x = a-1$.

158. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-3} = \sqrt{x+13}+\sqrt{x-8}$. Aufl. $x = 12$.

159. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-8} = \sqrt{x+8}+\sqrt{x-13}$. Aufl. $x = 17$.

160. $\sqrt{x-9}+\sqrt{x-16} = \sqrt{x}+\sqrt{x-21}$. Aufl. $x = 25$.

161. $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) = 1+\sqrt{x}-3x$. Aufl. $x = \frac{1}{4}$.

162. $1-\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{2-(x+4)\sqrt{x+1}}$. Aufl. $x=-\frac{2}{3}$.

163. $1-\sqrt{x-1}=\sqrt[3]{3(x-1)-(5+x)\sqrt{x-1}}$. Aufl. $x=1\frac{1}{9}$.

164. $\sqrt[m]{a-x}=\sqrt[3m]{(a-x)(a^2+ax+x^2)}$. Aufl. $x=a$.

165. $\frac{\sqrt{a\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}=\frac{a\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[3]{a^2}}{2a\sqrt{a}-\sqrt[3]{8a}}$. Aufl. $x=a^2$.

166. $\frac{x-a^2+2bc}{b+c}-\frac{x-b^2+2ac}{a+c}=\frac{c^2+2ab-x}{a-b}$. Aufl. $x=a^2+b^2+c^2$.

167. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{a}+\sqrt{2+a}$. Aufl. $x=1+a$.

168. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b$. Aufl. $x=\frac{2ab}{1+b^2}$.

169. $x-5=2+\sqrt{49-x\sqrt{x^2-56}}$. Aufl. $x=9$.

170. $x=a+\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2-a^2+b^2}}$. Aufl. $x=\frac{3a^2-b^2}{4a}$.

B. Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten.

1. $\left\{\begin{array}{l}x+y=6912\\ x-y=4444\end{array}\right\}$ $x=5678$. $y=1234$.

2. $\left\{\begin{array}{l}x+13y=176\\ x+7y=98\end{array}\right\}$ $x=7$. $y=13$.

3. $\left\{\begin{array}{l}3x+4y=33\\ 2x+5y=29\end{array}\right\}$ $x=7$. $y=3$.

4. $\left\{\begin{array}{l}3x-7y=3\\ 2x+5y=31\end{array}\right\}$ $x=8$. $y=3$.

5. $\left\{\begin{array}{l}7x+\frac{5}{2}y=413\\ 39x=14y-1609\end{array}\right\}$ $x=9$. $y=140$.

6. $\left\{\begin{array}{l}\frac{9x}{2}-\frac{5y}{3}=13\\ \frac{5x}{2}+\frac{2y}{3}=12\end{array}\right\}$ $x=4$. $y=3$.

7. $\left\{\begin{array}{l}\frac{5}{x}-\frac{14}{y}=10\\ \frac{7}{x}+\frac{5}{y}=137\end{array}\right\}$ $x=\frac{1}{16}$. $y=\frac{1}{5}$.

8. $\left\{\begin{array}{l}\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=37\\ \frac{1}{x}+\frac{4}{y}=55\end{array}\right\}$ $x=\frac{1}{3}$. $y=\frac{1}{13}$.

9. $$\begin{cases} \frac{33}{x} + \frac{56}{y} = 25 \\ \frac{21}{x} - \frac{20}{y} = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 3. \\ y = 4. \end{matrix}$$

10. $$\begin{cases} 7x + 18 = 2y - 2 \\ 2x - 12 = \frac{y}{15} + 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 10. \\ y = 45. \end{matrix}$$

11. $$\begin{cases} 5x + 16{,}5y = 5{,}75y + 3 \\ 3{,}875x - 3{,}75y = 5{,}5x - 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -8. \\ y = 4. \end{matrix}$$

12. $$\begin{cases} 2x + 5y = 28{,}4 \\ 3x - y = 12{,}85 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 5{,}45. \\ y = 3{,}5. \end{matrix}$$

13. $$\begin{cases} 7x + 3y = 73{,}895 \\ 8x - 2y = 77{,}53 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 10{,}01. \\ y = 1{,}275. \end{matrix}$$

14. $$\begin{cases} 11x = 8y + 189{,}92 \\ 3y + 7 = 2x - 24{,}1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 18{,}88. \\ y = 2{,}22. \end{matrix}$$

15. $$\begin{cases} 7x - 0{,}25y = 66{,}49815 \\ 3x + 2{,}5y = 28{,}5185 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 9{,}5. \\ y = 0{,}0074. \end{matrix}$$

16. $$\begin{cases} \frac{10}{3}x + 7{,}55 = 2{,}2y + 14{,}753 \\ 8{,}8y - \frac{5}{6}x = 12{,}513 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 3{,}306. \\ y = 1{,}735. \end{matrix}$$

17. $$\begin{cases} 3{,}625x + 2{,}25y - 3{,}25 = 1{,}25x + 9{,}75 \\ 2{,}45x - 7{,}5y + 125{,}25 = 2{,}75x + 4{,}5y \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -4{,}5215\ldots \\ y = 10{,}5505. \end{matrix}$$

18. $$\begin{cases} 0{,}2x - \frac{3{,}2 - 4y}{5} = x + 0{,}16 \\ \frac{1{,}2y}{0{,}3} - \frac{2{,}5x + 1}{y + 0{,}6} = 4y - 1\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 2. \\ y = 3. \end{matrix}$$

19. $$\begin{cases} \frac{1}{1 + 2x} = \frac{2}{1 + y} \\ \frac{1}{1 - 2x} = \frac{7}{1 - y} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 0{,}7. \\ y = 3{,}8. \end{matrix}$$

20. $$\begin{cases} \frac{x - 1}{5} - \frac{9 - x}{3} = \frac{y - 11}{4} \\ \frac{2y + 2}{3} - \frac{2x + y + 1}{8} = \frac{x + 14}{4} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 6. \\ y = 11. \end{matrix}$$

21. $$\begin{cases} \frac{6 + x}{5} - \frac{2x - y - 3}{4} = 3y - 2 \\ \frac{5y - 2}{2} + \frac{4x - 7}{6} = 23 - 5x \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 4. \\ y = 1. \end{matrix}$$

22. $$\begin{cases} \frac{x + 1}{5} = \frac{y - 2}{3} - \frac{2x - 3y + 7}{35} \\ \frac{2x}{3} - \frac{7 - y}{2} = \frac{47}{12} - \frac{2x + 1}{4} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 4. \\ y = 5. \end{matrix}$$

23. $$\begin{cases} \frac{4x + y - 6}{5} - \frac{y - 5}{3} = \frac{4x - y + 3}{4} \\ \frac{2x + 5}{3} - \frac{y - 21}{2} = 3y - 2x - 13 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 5. \\ y = 11. \end{matrix}$$

24. $\left\{\begin{array}{l} \frac{3x+5y-16}{2}-\frac{4x-3y-2}{3}=4 \\ \frac{7x-5y-12}{2}-\frac{5x+7y-14}{4}=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=5. \\ y=3. \end{array}$

25. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \\ \frac{2}{3}x-y=\frac{2a}{b}-\frac{2b}{a} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{3a}{b}. \\ y=\frac{2b}{a}. \end{array}$

26. $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=5a-b \\ 4x-5y=9b-a \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=a+b. \\ y=a-b. \end{array}$

27. $\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{5}x+y=\frac{8a-2b}{15} \\ x+\frac{3}{2}y=a \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{1}{2}(a+b). \\ y=\frac{1}{3}(a-b). \end{array}$

28. $\left\{\begin{array}{l} x+y=\frac{b^2-a^2}{ab} \\ bx+ay=4(b-a) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{3b-a}{b}. \\ y=\frac{b-3a}{a}. \end{array}$

29. $\left\{\begin{array}{l} x+y=5(a-b) \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=\frac{19}{15}a-\frac{7}{5}b \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2a-3b. \\ y=3a-2b. \end{array}$

30. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{5}+\frac{2y}{5}=a-b \\ \frac{x}{3}-\frac{2y}{5}=\frac{a}{15}-\frac{3}{5}b \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=2a-3b. \\ y=\frac{1}{2}(3a-2b). \end{array}$

31. $\left\{\begin{array}{l} x+y=2a \\ 5x-3y=2a+8b-8c \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=a+b-c. \\ y=a-b+c. \end{array}$

32. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y}=a(a+b) \\ x-a^2y=(a-b)b \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=a^2-b^2. \\ y=\frac{a-b}{a}. \end{array}$

33. $\left\{\begin{array}{l} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=a+b. \\ y=a-b. \end{array}$

34. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \\ x+y=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{a+b}{a-b}. \\ y=\frac{a-b}{a+b}. \end{array}$

35. $\left\{\begin{array}{l} (a-b)x+(a+b)y=2a \\ 2x+3y=\frac{5a^2-2ab+5b^2}{a^2-b^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{a+b}{a-b}. \\ y=\frac{a-b}{a+b}. \end{array}$

36. $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=\frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2} \\ 3x-2y=\frac{3a^2-5ab-2b^2}{a^2-b^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{a}{a+b}. \\ y=\frac{b}{a-b}. \end{array}$

37. $\begin{cases} 3x + 5y = \dfrac{5a^2 - 2ab + 3b^2}{ab} \\ 5x - 3y = \dfrac{5b^2 + 8ab - 3a^2}{ab} \end{cases} \quad x = \dfrac{a+b}{a}. \quad y = \dfrac{a-b}{b}.$

38. $\begin{cases} 3x + 2y = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} \\ 2x - 3y = \dfrac{4b^2 + 13ab - 9a^2}{6ab} \end{cases} \quad x = \dfrac{a+b}{3a}. \quad y = \dfrac{a-b}{2b}.$

39. $\begin{cases} x + y = \dfrac{(a+b)^2}{a-b} \\ 3x - 2y = \dfrac{3a^2 - 4ab + 3b^2}{a-b} \end{cases} \quad x = \dfrac{a^2+b^2}{a-b}. \quad y = \dfrac{2ab}{a-b}.$

40. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = \dfrac{(a+b)^2}{2(a-b)} \\ \dfrac{x}{3} - 2y = \dfrac{a^2 + b^2 - 6ab}{3(a-b)} \end{cases} \quad x = \dfrac{a^2+b^2}{a-b}. \quad y = \dfrac{ab}{a-b}.$

41. $\begin{cases} cx + (a-b)y = a + b + c \\ 3x - 2y = \dfrac{3a^2 - 3b^2 - 2c^2}{(a-b)c} \end{cases} \quad x = \dfrac{a+b}{c}. \quad y = \dfrac{c}{a-b}.$

42. $\begin{cases} x + y = \dfrac{b^2 + 2abc - c^2}{bc} \\ cx + by = b(a+1) + c(a-1) \end{cases} \quad x = \dfrac{ac+b}{c}. \quad y = \dfrac{ab-c}{b}.$

43. $\begin{cases} bx - ay = 2c \\ 5x + 3y = \dfrac{5a^2b + 3ab^2 + 5ac - 3bc}{ab} \end{cases} \quad x = \dfrac{ab+c}{b}. \quad y = \dfrac{ab-c}{a}.$

44. $\begin{cases} x - y = 2ab \\ ax - by = a^3 + 2ab^2 - b^3 \end{cases} \quad x = a^2 + ab + b^2. \quad y = a^2 - ab + b^2.$

45. $\begin{cases} \dfrac{(a+b)x}{5} - \dfrac{(a-b)y}{3} = 4ab. \\ 3(a-b)x + 5(a+b)y = 30(a^2 - b^2) \end{cases} \quad x = 5(a+b). \quad y = 3(a-b).$

46. $\begin{cases} x + y = 4(a - b + c) \\ 3ax - 2cy = 3a^2 - 6ab + 3ac + 4bc - 2c^2 \end{cases} \quad x = a - 2b + 3c. \quad y = 3a - 2b + c.$

47. $\begin{cases} y - x = 2a - 4c \\ ax + by = a^2 + 5ab + 3ac + 2b^2 - bc \end{cases} \quad x = a + 2b + 3c. \quad y = 3a + 2b - c.$

48. $\begin{cases} x + y = 2a^2 \\ ax + by = a^3 - b^3 + a^2b + ab^2 + (a-b)^2 \end{cases} \quad x = a^2 + b^2 + a - b. \quad y = a^2 - b^2 - a + b.$

49. $\begin{cases} x + y = (a+b)^3 \\ ax + by = a^4 + 3a^2b^2 + 4ab^3 \end{cases} \quad x = a^3 + b^3. \quad y = 3ab(a+b).$

50. $\begin{cases} \dfrac{(a+2b)x}{2} - \dfrac{(a-2b)y}{3} = 6ac \\ \dfrac{(a+3c)y}{3} - \dfrac{(a-3c)x}{2} = 4ab \end{cases} \quad x = 2a - 4b + 6c. \quad y = 3a + 6b - 9c.$

51. $\left\{\begin{aligned} &ax + cy = b \\ &ax - (a + c)y = \frac{a^2 - c^2}{b} - ay \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \\ y &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \end{aligned}$

52. $\left\{\begin{aligned} &(a^2 + b^2)x - a^2y = b^2(a^2 - b^2) \\ &(a^2 - b^2)x + b^2y = a^2(a^2 - b^2) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= a^2 - b^2. \\ y &= a^2 - b^2. \end{aligned}$

53. $\left\{\begin{aligned} &(a + b + c)x - (a + b - c)y = 4bc \\ &(a - b + c)x + (b + c - a)y = 8bc \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= a + 3b - c. \\ y &= a + 3b + c. \end{aligned}$

54. $\left\{\begin{aligned} &(a + 2)x - ay = 4 \\ &ax + (2 - a)y = 16 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 2 + 3a. \\ y &= 8 + 3a. \end{aligned}$

55. $\left\{\begin{aligned} &(1 + c)x - (1 - c)y = 2 \\ &x + y = 16 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 9 - 8c. \\ y &= 7 + 8c. \end{aligned}$

56. $\left\{\begin{aligned} &ax + by = 2(a^2 - b^2) \\ &\frac{y}{a - b} - \frac{x}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \frac{a^2 - b^2}{a}. \\ y &= \frac{a^2 - b^2}{b}. \end{aligned}$

57. $\left\{\begin{aligned} &x^2 - y^2 = a^2 \\ &x - y = b \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \frac{a^2 + b^2}{2b}. \\ y &= \frac{a^2 - b^2}{2b}. \end{aligned}$

58. $\left\{\begin{aligned} &x\sqrt{3} + y = 2 \\ &x\sqrt{2} - y = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 3(\sqrt{3} - \sqrt{2}). \\ y &= 3\sqrt{6} - 7. \end{aligned}$

59. $\left\{\begin{aligned} &x\sqrt{3} + y = 4 \\ &x - y\sqrt{2} = \sqrt{2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 2\sqrt{3} - \sqrt{2}. \\ y &= \sqrt{6} - 2. \end{aligned}$

60. $\left\{\begin{aligned} &x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\ &x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \sqrt{6}. \\ y &= 1. \end{aligned}$

61. $\left\{\begin{aligned} &\sqrt{x - \sqrt{y}} = \sqrt{x} - 2 \\ &\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 4. \\ y &= 16. \end{aligned}$

62. $\left\{\begin{aligned} &x\sqrt{a} + 2y = 2a - 3b \\ &2x\sqrt{b} - 6y = 3a + 5b \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}. \\ y &= \sqrt{ab} - \tfrac{1}{2}(a + 3b). \end{aligned}$

63. $\left\{\begin{aligned} &x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = a + b \\ &x + y = 2\sqrt{a} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \sqrt{a} + \sqrt{b}. \\ y &= \sqrt{a} - \sqrt{b}. \end{aligned}$

64. $\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{y} = a + \sqrt{ab} \\ &x - ay = a\sqrt{b} - \sqrt{a} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= (a - b)\sqrt{a}. \\ y &= \sqrt{a} - \sqrt{b}. \end{aligned}$

65. $\left\{\begin{aligned} &x - y = 3 \\ &x\sqrt{a} - y = a + 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 1 + \sqrt{a}. \\ y &= \sqrt{a} - 2. \end{aligned}$

66. $\left\{\begin{aligned} &x\sqrt{b} + y\sqrt{a} = a + b \\ &ab(x + y) = a^2\sqrt{b} + b^2\sqrt{a} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \frac{a}{b}\sqrt{b}. \\ y &= \frac{b}{a}\sqrt{a}. \end{aligned}$

67. $\left\{\begin{aligned} &x\sqrt{b} + y\sqrt{a} = a \\ &x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = \sqrt{ab} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \frac{2a\sqrt{b}}{a + b}. \\ y &= \frac{a - b}{a + b}\sqrt{a}. \end{aligned}$

68. $\left\{\begin{array}{l} y + \sqrt{x} = 1 \\ 2x - 46 = 2y^2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 144. \\ y = -11. \end{array}$

69. $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = a \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt{y}} = b \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = \left(\frac{4}{a + 6b}\right)^2. \\ y = \left(\frac{8}{3a - 6b}\right)^2. \end{array}$

70. $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x - y + 1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}x + y - 8} \\ 3x - 6 = 3\sqrt{x^2 - 7y + 13} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 10. \\ y = 7. \end{array}$

71. $\left\{\begin{array}{l} 5x + 7y - 2z = 13 \\ 8x + 3y + z = 17 \\ 2x + 3y + 4z = 20 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1. \\ y = 2. \\ z = 3. \end{array}$

72. $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 5y - 2z = -3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1. \\ y = 1. \\ z = 1. \end{array}$

73. $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y - 4z = 5 \\ x + 2y - z = 5 \\ 3x - 4y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2. \\ y = 1. \\ z = -1. \end{array}$

74. $\left\{\begin{array}{l} x + y = 16 \\ x + z = 22 \\ y + z = 28 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 5. \\ y = 11. \\ z = 17. \end{array}$

75. $\left\{\begin{array}{l} 3x - \tfrac{1}{4}y + z = 7\tfrac{1}{2} \\ 2x - \frac{y - 3z}{3} = 5\tfrac{1}{3} \\ 2x - \tfrac{1}{2}y + 4z = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2. \\ y = 2. \\ z = 2. \end{array}$

76. $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 24 \\ z - x = 2 \\ z - y = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 7. \\ y = 8. \\ z = 9. \end{array}$

77. $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x + y} = 1 \\ \frac{2}{x + z} = 1 \\ \frac{3}{y + z} = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 0. \\ y = 1. \\ z = 2. \end{array}$

78. $\left\{\begin{array}{l} \frac{2x + 5y}{3} - x = 5\tfrac{2}{3} \\ \frac{x - 3y}{2x + z} + 4 = 3\tfrac{2}{11} \\ 3\tfrac{1}{2}y + 4z = 34 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 3. \\ y = 4. \\ z = 5. \end{array}$

79. $\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{x} + \frac{a}{y} = b \\ \frac{b}{x} - \frac{b}{y} = c \\ \frac{c}{x} + \frac{c}{z} = d \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = \frac{2ab}{b^2 + ac}. \\ y = \frac{2ab}{b^2 - ac}. \\ z = \frac{2abc}{2abd - b^2c - ac^2}. \end{array}$

80. $\begin{cases} ax + \frac{y}{a} - az = \frac{1}{a} \\ \frac{x}{b} + by - bz = \frac{1}{b} \\ x - y + \frac{z}{c} = \frac{1}{c} \end{cases}$ $x = 1.\quad y = 1.\quad z = 1.$

81. $\begin{cases} xy = 72 \\ xz = 8 \\ yz = 9 \end{cases}$ $x = 8.\quad y = 9.\quad z = 1.$

82. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{z} = 2\frac{1}{2} \\ \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1\frac{1}{2} \end{cases}$ $x = 4.\quad y = 1.\quad z = \frac{1}{4}.$

83. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{z} = -2 \\ \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} = -3 \end{cases}$ $x = 27.\quad y = 8.\quad z = 125.$

84. $\begin{cases} \sqrt[a]{x} + \sqrt[a]{y} = c + \sqrt[a]{b} \\ \sqrt[a]{x} - \sqrt[a]{z} = \sqrt[a]{b} - b \\ \sqrt[a]{y} - \sqrt[a]{z} = c - b \end{cases}$ $x = b.\quad y = c^a.\quad z = b^a.$

85. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{z} + \sqrt{y} = 6 \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{z} = 1 \\ \sqrt{y} - \sqrt[3]{x} = 1 \end{cases}$ $x = 8.\quad y = 9.\quad z = 1.$

86. $\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1\frac{1}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{2}{3} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{3}{4} \end{cases}$ $x = 2.\quad y = 3.\quad z = 1.$

87. $\begin{cases} \sqrt[3]{x + y - z + 5} = 2 \\ \sqrt{2x - y + z} + 2 = 5 \\ \frac{x + y}{\sqrt{x + y}} = 0{,}4\sqrt{10z} \end{cases}$ $x = 4.\quad y = 4.\quad z = 5.$

88. $\begin{cases} \sqrt[4]{4(x + y + z + 4)} = 2\sqrt[4]{3x + y - z - 4} \\ \sqrt{\frac{x+y+z-35}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{x+y+z}{4}\right)^2 - \frac{15}{4}(y + z) + \frac{25}{16}} \\ \sqrt[-2]{z - x - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{y}} \end{cases}$ $x = 10.\quad y = 20.\quad z = 30.$

89. $\begin{cases} x + y + z + u = 10 \\ 5x + 4y + 3z + 2u = 30 \\ 15x + 10y + 6z + 3u = 65 \\ 35x + 20y + 16z + 4u = 139 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1. \\ y = 2. \\ z = 3. \\ u = 4. \end{cases}$

90. $\begin{cases} x + y + z + u = 5 \\ \frac{2x + y}{3} = \frac{58}{15} - \frac{3z - 2u}{5} \\ \frac{4z - 3u}{5} = 4 - \frac{4x - 3y}{5} \\ \frac{3x - 2y}{4} - \frac{2u - 3z}{5} = \frac{16}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2. \\ y = 1. \\ z = 3.. \\ u = -1. \end{cases}$

91. $\begin{cases} ax + \frac{y}{b} - \frac{z}{b} = a \\ bx - \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = b \\ ay + bz - bu = a \\ bz - ay + au = b \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1. \\ y = 1. \\ z = 1. \\ u = 1. \end{cases}$

92. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{5}u = 175 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{5}z - \frac{1}{2}u = -136 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}u = -19 \\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{4}u = -63 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 60. \\ y = 120. \\ z = 180. \\ u = 300. \end{cases}$

93. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = 0 \\ \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{u} = 1 \\ \sqrt{z} + \sqrt{u} - \sqrt{x} = 6 \\ \sqrt{u} + \sqrt{z} - \sqrt{y} = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1. \\ y = 4. \\ z = 9. \\ u = 16. \end{cases}$

94. $\begin{cases} x + y + z + u + v = a \\ x + y + z + v + w = b \\ x + y + z + u + w = c \\ x + y + v + u + w = d \\ x + z + v + u + w = g \\ y + z + v + u + w = h \end{cases}$ Bezeichnet man die Summe $a + b + c + d + g + h$ mit s, so ist $x = \frac{s}{5} - h$; $y = \frac{s}{5} - g$; $z = \frac{s}{5} - d$; $v = \frac{s}{5} - c$; $u = \frac{s}{5} - b$; $w = \frac{s}{5} - a$.

95. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{101}{180} \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 1\frac{7}{12} \\ \frac{2}{x} + \frac{9}{y} + \frac{6}{z} = 2{,}7 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4. \\ y = 9. \\ z = 5. \end{cases}$

C. Gleichungen vom zweiten Grade mit einem Unbekannten.

1. $3x^2 = 75$. Aufl. $x = \pm 5$.
2. $5x^2 = 51005$. Aufl. $x = \pm 101$.
3. $x^2 + a^2 = 1$. Aufl. $x = \pm\sqrt{1 - a^2}$.

4. $\frac{2x^2}{a} - 10a = \frac{5}{2}a + \frac{3x^2}{2a}$. Aufl. $x = \pm 5a$.
5. $x^2 - 2\sqrt{6} = 5$. Aufl. $x = \pm(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.
6. $x^2 - 7 = 4\sqrt{3}$. Aufl. $x = \pm(2 + \sqrt{3})$.
7. $x^2 - 3 = \sqrt{-40}$. Aufl. $x = \pm(\sqrt{5} + \sqrt{-2})$.
8. $\frac{ax - b}{x} + \frac{bx + a}{x^2} = c$. Aufl. $x = \pm\sqrt{\frac{a}{c - a}}$.
9. $\frac{2x}{x - 2} + \frac{x - 2}{x} = 2$. Aufl. $x = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$.
10. $\frac{x - 3}{x^2 - 4} + 1 = \frac{1}{x - 2}$. Aufl. $x = \pm 3$.
11. $x + 7 = \frac{2x + 1}{x - 5}$. Aufl. $x = \pm 6$.
12. $\frac{1}{1 - x} - \frac{x}{3 - x} = \frac{1}{2}$. Aufl. $x = \pm\sqrt{-3}$.
13. $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x - a}{x + a} = \frac{10}{3}$. Aufl. $x = \pm 2a$.
14. $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x - a}{x + a} = \frac{2(a^2 + 1)}{1 - a^2}$. Aufl. $x = \pm 1$.
15. $\frac{x^2}{x^2 - a^2} = \frac{x^2 - a^2}{5x^2 - 2a^2}$. Aufl. $x = \pm\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.
16. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2} = \frac{x^2 - 3b^2}{a^2}$. Aufl. $x = \pm\frac{1}{3}a\sqrt{3}$.
17. $\frac{a^4}{x^2} - \frac{x^2}{b^4} = \frac{x^2}{a^4 - b^4}$. Aufl. $x = \pm b\sqrt[4]{a^4 - b^4}$.
18. $x + \sqrt{a + x^2} = \frac{a^2 + a}{\sqrt{a + x^2}}$. Aufl. $x = \pm\frac{1}{2}(a - 1)$.
19. $\frac{a(x^2 - 7a^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - a\sqrt{a^2 - x^2} = 0$. Aufl. $x = \pm 2a$.
20. $\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$. Aufl. $x = \pm\frac{1}{2}$.
21. $\sqrt{7 + \sqrt{2x + \sqrt{3x^2 - 16x + 17}}} = 3$. Aufl. $x = \pm 1$.
22. $\sqrt{\frac{a + x}{x}} + \sqrt{\frac{a - x}{x}} = \sqrt{\frac{x}{b}}$. Aufl. $x = \pm 2\sqrt{b(a - b)}$.
23. $x + \sqrt{7 + x^2} = \frac{28}{\sqrt{7 + x^2}}$. Aufl. $x = \pm 3$.
24. $x^2 - 8x = 65$. Aufl. $x_1 = 13$; $x_2 = -5$.
25. $x^2 - 7x + 12 = 0$. Aufl. $x_1 = 3$; $x_2 = 4$.
26. $x^2 + 3x - 4 = 0$. Aufl. $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.

27. $24 - x^2 = 10x$. Aufl. $x_1 = 2$; $x_2 = -12$.

28. $x(9999 - x) = 10816010$. Aufl. $x_1 = 1234$; $x_2 = 8765$.

29. $5x^2 + x = 4$. Aufl. $x_1 = \frac{4}{5}$; $x_2 = -1$.

30. $4x^2 - 20x + 9 = 0$. Aufl. $x_1 = \frac{9}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

31. $3x^2 - x = 7$. Aufl. $x_1 = 1{,}70\ldots$; $x_2 = -1{,}37\ldots$

32. $x^2 = 1 - x$. Aufl. $x_1 = 0{,}618\ldots$; $x_2 = -1{,}618$.

33. $-2x(1 - 6x) = \frac{1}{4}$. Aufl. $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = -\frac{1}{12}$.

34. $x^2 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = 0$. Aufl. $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = -1$.

35. $x^2 - \frac{x}{2} = 3$. Aufl. $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{3}{2}$.

36. $x + \frac{1}{x} = 2{,}9$. Aufl. $x_1 = 2{,}5$; $x_2 = 0{,}4$.

37. $2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} = 0$. Aufl. $x_1 = 1$; $x_2 = -2{,}5$.

38. $x^2 + x\sqrt{3} = 18$. Aufl. $x_1 = 2\sqrt{3}$; $x_2 = -3\sqrt{3}$.

39. $x^2 + 6x + 2 = 4\sqrt{3}$. Aufl. $x_1 = \sqrt{3} - 1 = 0{,}732$;
$x_2 = -(5 + \sqrt{3}) = -6{,}732$.

40. $x^2 - 10x + 19 + 4\sqrt{2} = 0$. Aufl. $x_1 = 7 - \sqrt{2} = 5{,}5858$;
$x_2 = 3 + \sqrt{2} = 4{,}4142$.

41. $x^2\sqrt{3} + 2x\sqrt{2} = 16 + 12\sqrt{3}$. Aufl. $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6} = 3{,}8617$;
$x_2 = -(\sqrt{2} + \frac{5}{3}\sqrt{6}) = -5{,}4967$.

42. $\frac{1}{x} = \frac{2x - 3}{2}$. Aufl. $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

43. $\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} = \frac{4}{3}$. Aufl. $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -2$.

44. $\frac{2 - 3x}{4} - \frac{4 - x}{x - 2} = \frac{11}{4}$. Aufl. $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{2}{3}$.

45. $\frac{4x}{2 + x} - 3 = \frac{10}{3x}$. Aufl. $x_1 = 10$; $x_2 = -\frac{2}{3}$.

46. $\frac{x}{x - 6} + 1 = \frac{60}{x + 4}$. Aufl. $x_1 = 21$; $x_2 = 8$.

47. $\frac{84}{x} - \frac{180}{x + 2} + \frac{60}{x - 8} = 0$. Aufl. $x_1 = 28$; $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

48. $\frac{7x - 11}{9x - 13} = \frac{11(x + 1)}{13x + 29}$. Aufl. $x_1 = 2$; $x_2 = 11$.

49. $\frac{3x + 2}{x - 10} = \frac{7x - 12}{x + 8}$. Aufl. $x_1 = 1$; $x_2 = 26$.

50. $\frac{3x - 10}{x - 10} = \frac{x + 2}{38 - x}$. Aufl. $x_1 = 3$; $x_2 = 30$.

51. $\frac{90}{x-1} - \frac{48}{x} = \frac{39}{x-3}$. Aufl. $x_1 = 16$; $x_2 = -3$.

52. $\frac{x^3 - 21x^2 + 2}{x^2 - 14x + 16} = x - 4$. Aufl. $x = -12 \pm \sqrt{166}$.

53. $2x - \frac{28 - x}{x + 2} = 14$. Aufl. $x_1 = 8$; $x_2 = -3{,}5$.

54. $\frac{16 - x}{4} - \frac{2(x - 11)}{x - 6} = \frac{x - 4}{12}$. Aufl. $x_1 = 1$; $x_2 = 12$.

55. $\frac{6x + 4}{5} - \frac{15 - 2x}{x - 3} = \frac{7(x - 1)}{5}$. Aufl. $x_1 = 6$; $x_2 = 18$.

56. $\frac{3x}{2} - \frac{3x - 20}{18 - 2x} = 2 + \frac{3x^2 - 80}{2(x - 1)}$. Aufl. $x_1 = 8$; $x_2 = 23$.

57. $\frac{x - 1}{8 - x} + \frac{8 - x}{x - 1} = 2{,}9$. Aufl. $x_1 = 3$; $x_2 = 6$.

58. $\frac{6x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 7}} + 5\sqrt{2x^2 + 7} = 12x$. Aufl. $x = 3$.

59. $\sqrt{\frac{5x}{4} + 1} = \frac{x}{2} - 8$. Aufl. $x = 28$.

60. $5\sqrt{2x + 7} + \frac{6x + 1}{\sqrt{2x + 7}} = 12\sqrt{x}$. Aufl. $x = 9$.

61. $\sqrt{2x + 1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x + 1}}$. Aufl. $x = 4$.

62. $13\sqrt{3x - 2} - 6\sqrt{7x + 42} = \frac{5x + 50}{\sqrt{3x - 2}}$. Aufl. $x = 22$.

63. $\sqrt{2x + 7} = \sqrt{x} + 2$. Aufl. $x_1 = 9$; $x_2 = 1$.

64. $3\sqrt{5x + 1} - 2\sqrt{3x + 4} = 8$. Aufl. $x = 7$.

65. $\sqrt{4x + 9} + \sqrt{3{,}5x + 1} = \sqrt{15x + 19}$. Aufl. $x_1 = 10$; $x_2 = 18$.

66. $x^2 - bx + 6a^2 + 5ab = 5ax + 6b^2$. Aufl. $x_1 = 2a + 3b$; $x_2 = 3a - 2b$.

67. $x^2 - cx + ab - ac - bx = 2c^2 - 2bc + ax$. Aufl. $x_1 = a + 2c$; $x_2 = b - c$.

68. $ab(x^2 + 2) = (a^2 + 2b^2)x$. Aufl. $x_1 = \frac{a}{b}$; $x_2 = \frac{2b}{a}$.

69. $\frac{ab - x^2}{ab} - \frac{a + x}{a} - \frac{b + x}{b} = 0$. Aufl. $x_1 = -a$; $x_2 = -b$.

70. $(a^2 - b^2)x^2 + 4ab = 2(a^2 + b^2)x$. Aufl. $x_1 = \frac{2a}{a + b}$; $x_2 = \frac{2b}{a - b}$.

71. $x^2 + 4b^2 = a^2 + 4bx$. Aufl. $x_1 = 2b + a$; $x_2 = 2b - a$.

72. $x^2 - ax + a(b + 2c) + b^2 = 2bx + 4c^2$. Aufl. $x_1 = a + b - 2c$; $x_2 = b + 2c$.

73. $x^2 + b^2x = (a^2 + a + b)x - (a+b)^2(a - b)$. Aufl. $x_1 = a^2 - b^2$; $x_2 = a + b$.

74. $x^2 + 2ab(a^2 + b^2) = (a + b)^2 x$. Aufl. $x_1 = a^2 + b^2$; $x_2 = 2ab$.

75. $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^4 - b^4)x + a^6 - b^6 = 0$.
Aufl. $x_1 = a^2 + ab + b^2$; $x_2 = a^2 - ab + b^2$.

76. $2abx^2 + \frac{3a^2x}{c} = \frac{6a^2 - 2ab - 8b^2}{c^2} - \frac{4b^2x}{c}$. Aufl. $x_1 = \frac{2(a-b)}{ac}$; $x_2 = -\frac{3a + 4b}{2bc}$.

77. $\frac{x^2 - 3a^2}{1,5x^2 - 2a^2} + \frac{x^2 + 2a^2}{4x^2 - 22a^2} = 1$. Aufl. $x_1 = \pm 3a\sqrt{2}$; $x_2 = \pm a\sqrt{-2}$.

78. $\frac{4b}{a} + \frac{a - 4b}{x - 2b} = \frac{a + 4b}{x + 2b}$. Aufl. $x_1 = a + 2b$; $x_2 = a - 2b$.

79. $1 - abx = \frac{1}{(a + b)^2 x}$. Aufl. $x_1 = \frac{1}{b(a + b)}$; $x_2 = \frac{1}{a(a + b)}$.

80. $ax - bx = \frac{a}{x} \cdot \frac{a - 2bx}{a + b}$. Aufl. $x_1 = \frac{a}{a + b}$; $x_2 = -\frac{a}{a - b}$.

81. $a^2 + \frac{1 + x}{1 - x} \cdot b^2 = \frac{ab}{x(1 - x)}$. Aufl. $x_1 = \frac{a}{a + b}$; $x_2 = \frac{b}{a - b}$.

82. $\frac{(a + b)^2}{a} x^2 - ax + \frac{b^2}{a} x = \frac{a + b}{a - b} x - 1$. Aufl. $x_1 = \frac{a - b}{a + b}$; $x_2 = \frac{a}{a^2 - b^2}$.

83. $\frac{a - b}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{x}\sqrt{a} - \frac{a - b}{2x}\sqrt{b} + \frac{ab}{2x^2} = 0$. Aufl. $x_1 = \frac{a\sqrt{b}}{a - b}$; $x_2 = \frac{b}{2}\sqrt{a}$.

84. $pqx - p(1 + pq) + q(1 - pq) = \frac{1 - p^2q^2}{x}$. Aufl. $x_1 = \frac{1 + pq}{q}$; $x_2 = \frac{pq - 1}{p}$.

85. $2pqx(q^2x - p^2) + 2pq(p^2 + q^2) + p^2(p^2 + q^2) = q^2x(q^2 + 5p^2)$.
Aufl. $x_1 = \frac{p^2 + q^2}{2pq}$; $x_2 = \frac{p^2 + 2pq}{q^2}$.

86. $\frac{k}{k - g^2}(x - 1) - \frac{k}{g}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$. Aufl. $x_1 = \frac{k}{g^2}$; $x_2 = \frac{k - g^2}{k}$.

87. $a^m b^3 x^2 - a^{2m-1} x = a^4 b^5 x - a^{m+3} b^2$. Aufl. $x_1 = \frac{a^{m-1}}{b^3}$; $x_2 = a^{4-m} b^2$.

88. $3c^2x^2 - 2cx\sqrt{3a} + a = dx^2 + 2x\sqrt{bd} + b$.
Aufl. $x_1 = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{c\sqrt{3} - \sqrt{d}}$; $x_2 = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{c\sqrt{3} - \sqrt{d}}$.

89. $15x^2 - (5a + 3b - 3c)(50b - 12a - 90c + 15x) = 15bc + 324ac - 169ab$. Aufl. $x_1 = 4a + 5b - 6c$; $x_2 = a - 2b + 3c$.

90. $x^4 + 5x^2 = 6$. Aufl. $x_1 = \pm 1$; $x_2 = \pm\sqrt{-6}$.

91. $x^4 + 10x^2 + 1 = 0$. Aufl. $x = \pm(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$.

92. $x^4 - 2(a + b)x^2 + (a - b)^2 = 0$. Aufl. $x = \pm(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$.

93. $x^4 - 14x^2 + 1 = 0$. Aufl. $x = \pm(2 \pm \sqrt{3})$.

94. $x^2 + 3 = \frac{17 - x^2}{x^2 + 3}$. Aufl $x_1 = \pm 1$; $x_2 = \pm 2\sqrt{-2}$.

95. $\sqrt{2x^2 + 17} - \sqrt{x^2 - 7} = 4$. Aufl. $x_1 = \pm\sqrt{32}$; $x_2 = \pm 4$.

96. $x - 4\sqrt{x} + 1 = 0$. Aufl. $x = (2 \pm \sqrt{3})^2$.

97. $x^{-6} + 4x^{-3} = -3$. Aufl. $x_1 = -1$; $x_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

98. $\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} = 3$. Aufl. $x_1 = 8$; $x_2 = -3\frac{3}{8}$.

99. $x^4 - 12ax^2 + 16b^2 = 0$. Aufl. $x = \pm(\sqrt{3a + 2b} \pm \sqrt{3a - 2b})$.

100. $x^4 - 2(a + b)^2x^2 = 4ab(a + b)^2$. Aufl. $x = \pm(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})\sqrt{a + b}$.

101. $x^4 + a^4 + 6a^3b + 9a^2b^2 = 2a^2x^2 + 10abx^2$.
Aufl. $x = \pm(\sqrt{a^2 + 4ab} \pm \sqrt{ab})$.

102. $x^3 - \sqrt{x^3} = 56$. Aufl. $x = 4$.

103. $\sqrt{x + 12} + \sqrt[4]{x + 12} = 6$. Aufl. $x = 4$.

D. Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren Unbekannten.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ $x = 3$.*) $y = 2$.

2. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = \frac{5}{6} \\ 3x^2 - 2y^2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$ $x = \frac{1}{3}$. $y = \frac{1}{2}$.

3. $\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 107 \\ 2x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$ $x = 4$. $y = 3$.

4. $\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 113 \\ x^2 - y^2 = 35 \end{cases}$ $x = 6$. $y = 1$.

5. $\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 = 84 \\ 3x^2 - 2y^2 = 40 \end{cases}$ $x = 4$. $y = 2$.

6. $\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ 5x^2 - 7y^2 = 62 \end{cases}$ $x = 5$. $y = 3$.

7. $\begin{cases} 2x^2 - 9y^2 = 31 \\ 3y - 2x = -7 \end{cases}$ $x = 4$. $y = \frac{1}{3}$.

8. $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8{,}75 \end{cases}$ $x = 2{,}5$. $y = 3{,}5$.

*) In diesen Beispielen ist für jeden der Unbekannten nur ein Werth angegeben, die Berechnung der anderen den Schülern überlassen worden.

9. $\left.\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5xy = \frac{5}{24} \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = \frac{1}{4}. \\ y = \frac{1}{6}. \end{matrix}$

10. $\left.\begin{cases} x - y = 2{,}1 \\ xy = 1 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 2{,}5. \\ y = 0{,}4. \end{matrix}$

11. $\left.\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ xy = 15 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 5. \\ y = 3. \end{matrix}$

12. $\left.\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 4. \\ y = 5. \end{matrix}$

13. $\left.\begin{cases} x + y = 1{,}5 \\ 2x^2 + 3y^2 = 2{,}75 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 1. \\ y = \frac{1}{2}. \end{matrix}$

14. $\left.\begin{cases} 2x + 5y = 52 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 6. \\ y = 8. \end{matrix}$

15. $\left.\begin{cases} 4x + y = 43 \\ 3x^2 + 2y^2 = 318 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 10. \\ y = 3. \end{matrix}$

16. $\left.\begin{cases} x - y = 10 \\ x^2 + y^2 = 178 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 13. \\ y = 3. \end{matrix}$

17. $\left.\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x^2 - y^2 = 23 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 6. \\ y = 7. \end{matrix}$

18. $\left.\begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 8. \\ y = 12. \end{matrix}$

19. $\left.\begin{cases} 5x - 4y = 18 \\ 4x^2 + y^2 = 64{,}25 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 4. \\ y = \frac{1}{2}. \end{matrix}$

20. $\left.\begin{cases} xy = 99 \\ x^2 + y^2 = 202 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 9. \\ y = 11. \end{matrix}$

21. $\left.\begin{cases} xy = 1{,}6 \\ 2x^2 + 5y^2 = 32{,}8 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 4. \\ y = 0{,}4. \end{matrix}$

22. $\left.\begin{cases} x + y = 13 \\ x^3 + y^3 = 637 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 8. \\ y = 5. \end{matrix}$

23. $\left.\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 98 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 5. \\ y = 3. \end{matrix}$

24. $\left.\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ (x + y + 1)^2 + (x - y + 1)^2 = 34 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 3. \\ y = 1. \end{matrix}$

25. $\left.\begin{cases} 9x^2 = 16y^2 \\ x + xy + y = 62 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 8. \\ y = 6. \end{matrix}$

26. $\left.\begin{cases} x + y = 12 \\ x + xy + y = 47 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 5. \\ y = 7. \end{matrix}$

27. $\left.\begin{cases} x + y = 11 \\ x^2 + xy + y^2 = 93 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 7. \\ y = 4. \end{matrix}$

28. $\left.\begin{cases} x + y = 17 \\ x + xy = 72 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 12. \\ y = 5. \end{matrix}$

29. $\begin{cases} xy + x = 153 \\ xy - y = 128 \end{cases}$ $x = 17.$ $y = 8.$

30. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = a \\ x - y + x^2 - y^2 = b \end{cases}$ $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2a + 2b + 1}.$ $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2a - 2b + 1}.$

31. $\begin{cases} x + y = 16 \\ 2xy - y^2 = 85 \end{cases}$ $x = 11.$ $y = 5.$

32. $\begin{cases} 3x + 5y = 62 \\ xy + y^2 = 112 \end{cases}$ $x = 9.$ $y = 7.$

33. $\begin{cases} x + y = 24 \\ 2xy + 5y^2 = 891 \end{cases}$ $x = 13.$ $y = 11.$

34. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 180 \\ 4(x + y) = \frac{9}{5}xy \end{cases}$ $x = 4.$ $y = 5.$

35. $\begin{cases} x + xy = 96 \\ 3x + 5y = \frac{31}{30}xy \end{cases}$ $x = 6.$ $y = 15.$

36. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 189 \\ xy(x + y) = 180 \end{cases}$ $x = 4.$ $y = 5.$

37. $\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 272 \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 32 \end{cases}$ $x = 5.$ $y = 3.$

38. $\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 580 \\ (x + y)xy = 210 \end{cases}$ $x = 3.$ $y = 7.$

39. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 72 \\ xy = 30 \end{cases}$ $x = 6.$ $y = 5.$

40. $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 477 \\ x^2 + y^2 + x + y = 62 \end{cases}$ $x = 7.$ $y = 2.$

41. $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}z = 8 \\ x^2 + y^2 = 20 \\ y^2 + z^2 = 80 \end{cases}$ $x = \pm 2.$ $y = \pm 4.$ $z = 8.$

42. $\begin{cases} x^2 + xz = 20 \\ z^2 + xz = 80 \\ y^2 + yz + z^2 = 154 - 5y \end{cases}$ $x = 2.$ $y = 5.$ $z = 8.$

43. $\begin{cases} x(y + z) = 5 \\ y(x + z) = 8 \\ z(x + y) = 9 \end{cases}$ $x = 1.$ $y = 2.$ $z = 3.$

44. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x + y + z = 1 \\ yz = -2 \end{cases}$ $x = 0.$ $y = -1.$ $z = 2.$

45. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ y^2 = 2xz - b \\ xz = cd \end{cases}$ $x = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a + b} \pm \sqrt{a + b - 4cd}).$ $y = \pm\sqrt{2cd - b}.$ $z = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{a + b} \mp \sqrt{a + b - 4cd}).$

E. Proportionen.

a. Das unbekannte Glied x in folgenden Proportionen zu bestimmen. (Zu §. 238.)

1. $3 : 6 = 4 : x$
   $x = 8.$
2. $x : 5 = 7 : 10$
   $x = 3{,}5.$
3. $4 : x = 5 : 6$
   $x = 4\frac{4}{5}.$
4. $221a^2b^2 : 17apq = 26ab^2 : x$
   $x = 2pq.$
5. $29(a + b) : x = 551(a^2 - b^2) : 19(a - b)$
   $x = 1.$
6. $3a^2 + 2ab - 8b^2 : 5a^2 + 4ab - 12b^2 = x : 5a - 6b$
   $x = 3a - 4b.$
7. $3 : \frac{2}{3} = \frac{x}{4} : 2$
   $x = 36.$
8. $1 : \frac{4}{x} = 5 : 6$
   $x = 3\frac{1}{3}.$
9. $a^2b : a = ab : x$
   $x = 1.$
10. $a : b = \frac{c}{x} : d$
   $x = \frac{bc}{ad}.$
11. $a^3 + 1 : a^2 - a + 1 = a^2 - 1 : x$
   $x = a - 1.$
12. $a^2 - b^2 : a^3 - b^3 = x : a^2 + ab + b^2$
   $x = a + b.$
13. $5a^2 + 6ab + b^2 : x = 25a^4 - 26a^2b^2 + b^4 : 5a^2 - ab$
   $x = \frac{a}{a - b}.$
14. $6a^2 + 7ab + 2b^2 : 3a^2 + 8ab + 4b^2 = 2a + b : x + 2b$
   $x = a.$

b. Das unbekannte Glied x durch Anwendung der Sätze des §. 241. zu bestimmen.

1. $a - x : x = b : c$
   $x = \frac{ac}{b + c}.$
2. $a + x : b = c + x : d$
   $x = \frac{ad - bc}{b - d}.$
3. $a + x : b + x = c + x : d + x$
   $x = \frac{bc - ad}{a + d - b - c}.$
4. $8 + x : x = 5 : 3$
   $x = 12.$
5. $4 - x : x = 2 : 5$
   $x = 2\frac{6}{7}.$
6. $5 + x : 9 = 6 + x : 10$
   $x = 4.$
7. $14 + x : 2 + x = 18 + x : 3 + x$
   $x = 2.$

8. $25 + x : 3 + x = 5 + x : x - 6$
   $x = 15.$

9. $16 + x : 6 + x = 4 + x : x$
   $x = 4.$

10. $3x - 2 : 5x + 8 = 1 : 2$ *)
    $x = 12.$

11. $5x + 3 : 2x + 6 = 5 : 4$
    $x = 1\frac{4}{5}.$

12. $10x + 3 : 3x + 2 = 3 : 1$
    $x = 3.$

13. $a + x : b + x = c - x : d - x$
    $x = \frac{ad - bc}{a + c - b - d}.$

14. $ax \pm b : cx \pm d = e : f$
    $x = \pm \frac{bf - de}{ce - af}.$

c. Ueber laufende Proportionen.
(Zu §. 244—246.)

1. $\left.\begin{array}{l} x : y = 2 : 3 \\ x : z = 3 : 1 \\ v : x = 2 : 1 \end{array}\right\} x : y : z : v = 6 : 9 : 2 : 12.$

2. $\left.\begin{array}{l} z : x = 3 : 4 \\ y : v = 1 : 2 \\ v : x = 3 : 2 \end{array}\right\} x : y : z : v = 4 : 3 : 3 : 6.$

3. $\left.\begin{array}{l} x : z = o : p \\ v : x = p : r \\ y : v = r : q \end{array}\right\} x : y : z : v = orq : orp : prq : opq.$

4. $\left.\begin{array}{l} x : v = 2 : 3 \\ w : x = 1 : 2 \\ y : v = 4 : 5 \\ z : w = 3 : 4 \end{array}\right\} x : y : z : v : w = 40 : 48 : 15 : 60 : 20.$

5. $\left.\begin{array}{l} a : c = 5 : 3 \\ b : g = 2 : 3 \\ c : h = 1 : 2 \\ n : h = 5 : 4 \\ n : g = 5 : 9 \\ a : d = 1 : 5 \end{array}\right\} a : b : c : d : g : h : n = 10 : 18 : 6 : 50 : 27 : 12 : 15.$

6. Die Zahl 228 in 4 Theile x, y, z, v zu theilen, so daß sich verhält: $x : y : z : v = 2 : 4 : 7 : 6.$
   Aufl. $x = 24,\ y = 48,\ z = 84,\ v = 72.$

7. Die Zahl 1000 in 4 Theile x, y, z, v zu theilen, so daß sich verhält: $x : y : z : v = 8 : 6 : 5 : 1.$
   Aufl. $x = 400,\ y = 300,\ z = 250,\ v = 50.$

8. Die Zahl 6000 in 4 Theile x, y, z, v zu theilen, so daß sich verhält:
   $\left.\begin{array}{l} x : y = 10 : 9 \\ y : z = 3 : 2 \\ z : v = 6 : 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2000,\ y = 1800. \\ z = 1200,\ v = 1000. \end{array}$

9. Die Zahl 185 in 4 Theile x, y, z, v zu theilen, so daß sich verhält:
   $\left.\begin{array}{l} x : z = 5 : 6 \\ y : v = 2 : 3 \\ z : v = 4 : 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 50,\ y = 30, \\ z = 60,\ v = 45. \end{array}$

---

*) Die Coëfficienten von x sind vor Anwendung des §. 241. bei diesen und ähnlichen Aufgaben mit Hülfe des §. 240. fortzuschaffen.

10. Die Zahl 10 in 4 Theile x, y, z, v zu theilen, so daß sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} y:v=1:2 \\ y:z=2:3 \\ v:x=4:1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=1,\ y=2, \\ z=3,\ v=4. \end{array}$$

11. Die Zahl 5780 in 6 Theile a, b, c, d, e, f zu theilen, so daß sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} c:d=2\frac{1}{2}:3 \\ e:f=4:1\frac{1}{2} \\ d:b=2:3 \\ a:f=1:3\frac{1}{4} \\ d:a=3:2\frac{1}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=336,\ b=648, \\ c=360,\ d=432, \\ e=2912,\ f=1092. \end{array}$$

12. Die unbekannten Zahlen x, y, z und v so zu bestimmen, daß $x+y-z+v=2497$ ist, und daß sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} x:y=7:26 \\ y:z=5:21 \\ z:v=9:20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=105,\ y=390, \\ z=1638,\ v=3640. \end{array}$$

13. Die unbekannten Zahlen x, y und z so zu bestimmen, daß $6x-4y+3z=14$ ist, und daß sich verhält:

$x:y:z=1:2:3.$

Aufl. $x=2,\ y=4,\ z=6.$

14. Die unbekannten Zahlen x, y, z so zu bestimmen, daß $6x-5y-8z=6$ ist, und daß sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} x:y=2:1 \\ x:z=5:2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=20,\ y=10, \\ z=8. \end{array}$$

15. Die unbekannten Zahlen x, y, z so zu bestimmen, daß $\frac{7x}{12}-\frac{2y}{9}-\frac{z}{2}=6$ ist, und daß sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} x:z=2:1 \\ z:y=3:2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=36,\ y=27. \\ z=18. \end{array}$$

16. Die unbekannten Zahlen x, y, z so zu bestimmen, daß $2x-3y+4z=1$ ist, und daß sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} x:y=3:2 \\ y:z=4:3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}, \\ z=\frac{1}{4}. \end{array}$$

17. Die unbekannten Zahlen x, y, z, v so zu bestimmen, daß $x-3y-5z+7v=16$ ist, und daß sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} x:y=7:8 \\ z:v=9:10 \\ y:v=4:5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=14,\ y=16, \\ z=18,\ v=20. \end{array}$$

18. Die unbekannten Zahlen x, y, z, u und v so zu bestimmen, daß $x+2y+3z+4u+5v=54$ ist, und sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} v:2=u:3 \\ x:4=y:5 \\ z:8=u:4 \\ x:2=z:3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=4,\ y=5,\ z=6, \\ u=3,\ v=2. \end{array}$$

19. Die unbekannten Zahlen x, y, z, u, v und w so zu bestimmen, daß $10x-y+4z-3u+7v-6w=35$ ist, und sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} x:z = 5:4 \\ z:y = 8:15 \\ x:u = 6:7 \\ v:u = 9:35 \\ w:x = 17:15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=10,\ y=15, \\ z=8,\ \ u=11\frac{2}{3}, \\ v=3,\ \ w=11\frac{1}{3}. \end{array}$$

20. Die unbekannten Zahlen x, y, z, u, v und w so zu bestimmen, daß $5x + 2y - 10z + 20u - v - 25w = 138$ ist, und daß sich verhält:

$$\left.\begin{array}{l} x:y=1:6 \\ y:z=3:1 \\ y:u=4:1 \\ u:v=1:2 \\ x:w=2:1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=12,\ y=72, \\ z=24,\ u=18, \\ v=36,\ w=6. \end{array}$$

F. Logarithmische Gleichungen.

1. $\left(\frac{1}{0,4}\right)^x = 6,25$. Aufl. $x = 2$.
2. $\left(\frac{821}{683}\right)^x = \frac{1483}{4517}$. Aufl. $x = 6,052224$.
3. $\left(\frac{5}{6}\right)^x = 72,75$. Aufl. $x = -23,51358$.
4. $10,275^x = (3054,11)^9$. Aufl. $x = 31$.
5. $\sqrt[x]{8192 \,.\, 128} = \frac{1}{16}$. Aufl. $x = -5$.
6. $a^x \,.\, b^x = c$. Aufl. $x = \frac{\log c}{\log a + \log b}$.
7. $a^{mx} \,.\, b^{nx} = c$. Aufl. $x = \frac{\log c}{m\log a + n\log b}$.
8. $x^x = x$. Aufl. $x = 1$.
9. $10^x = 2,718282$. Aufl. $x = 0,4342945$.
10. $(-4,56)^x = 432,3738$. Aufl. $x = 4$.
11. $4^x = \sqrt[x]{262144}$. Aufl. $x = \pm 3$.
12. $\sqrt[x+5]{13^{5x-17}} = \frac{1}{169}$. Aufl. $x = 1$.
13. $\sqrt[x]{14,67799} = 1,467799$. Aufl. $x = 7$.
14. $\sqrt[3x]{13^{11x+2}} = \sqrt[2x]{11^{13x+3}}$. Aufl. $x = -0,3052456$.
15. $7^{\log x} = 5,7969514$. Aufl. $x = 8$.
16. $\sqrt[x+m]{a^{mx+1}} = b$. Aufl. $x = \frac{m\log b - \log a}{m\log a - \log b}$.
17. $6^{2x+4} = 3^{3x} \,.\, 2^{x+8}$. Aufl. $x = 4$.
18. $(0,3)^{x+2} \,.\, 46^{2-x} = (2,36)^x \,.\, 0,6542987$. Aufl. $x = 0,9630387$.
19. $3^{x+2} - 2^x = 3^x + 2^{x-1}$. Aufl. $x = -4,128532$.
20. $1,06^x - 0,9\,(1,06)^{x-11} = 2,257057$. Aufl. $x = 25$.
21. $(0,5)^{x-1} - (2,4)^{2x} = (2,4)^{2x-1} - (0,5)^x$. Aufl. $x = 0,3069885$.
22. $12 \,.\, 5^{2x+2} + 1726 \,.\, 8^{x-1} = 122 \,.\, 8^{x+1} - 7 \,.\, 5^{2x+5}$. Aufl. $x = -2,960305$.
23. $3^{-x} + 4^{x+2} = \frac{1}{3^x} + 5^{-x}$. Aufl. $x = -0,925513$.

24. $(0{,}37)^{2x} + (0{,}37)^x = 20$. Aufl. $x = -1{,}394309$.
25. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$. Aufl. $x = 1\frac{1}{2}$.
26. $3^{2x+1} - 3^x = 24$. Aufl. $x = 1$.
27. $4^{x+2} + 2^{x+1} = 5$. Aufl, $x = -1$.
28. $(0{,}32)^{x+3}\sqrt{(1{,}0625)^{x+1}} = \frac{5}{587}\sqrt[3]{(\frac{35}{37})^{4x+1}}\sqrt[4]{(\frac{47}{15})^{3-x}}$.
Aufl. $x = 0{,}719871$.
29. $0{,}5185 + \log(x + 1{,}2) = 2 - \log(x + 7{,}47)$.
Aufl. $x = 2$ oder $x = -10{,}67$.
30. $\log(225^x - 201) = \log 24 + \log 2101$. Aufl. $x = 2$.
31. $3 \log 5x^2 - 7 \log \sqrt[3]{x^{-1}} = \log 2x^{\frac{1}{3}}$. Aufl. $x = 0{,}5963689$.
32. $10 + \log(x + 0{,}7) = 9 - \log(x + 0{,}13)$. Aufl. $x = 0{,}01$.
33. $9 + \log(x + 4) = 10 - \log(x + 1)$. Aufl. $x = 1$.
34. $\log 218 = \log(36^{5x} + 2688) - \log 48$. Aufl. $x = 0{,}5$.
35. $(56)^{\log x} = 3136$. Aufl. $x = 100$.
36. $\sqrt[x]{(1{,}37129)^{-10}} + \sqrt[x]{(1{,}37129)^{-20}} = 0{,}11$. Aufl. $x = 1{,}37129$.
37. $10^{0{,}289623} = x^{\log x}$. Aufl. $x = 3{,}45276$ oder $x = 0{,}289623$.
38. Wie groß ist der Logarithmus von 210 in einem System, dessen Basis 0,5 ist? Aufl. $-7{,}714245$.
39. Wie groß ist die Basis eines Logarithmensystems, in welchem der Logarithmus von $\frac{1}{8}\sqrt{2} = -0{,}625$ ist? Aufl. 16.
40. Durch welche Zahl muß man 20736 radiciren, um eben so viel zu erhalten, als wenn man 12 mit der zu findenden Zahl potenzirt? Aufl. ± 2.

Neunter Abschnitt.
Von den Progressionen.

Erstes Kapitel.
Von den arithmetischen Progressionen.

§. 251.

Eine **arithmetische Progression** ist eine Reihe von Zahlen, die so beschaffen ist, daß jede zwei auf einander folgenden dieselbe Differenz haben; oder was dasselbe sagt, in welcher jede drei auf einander folgenden eine stetige arithmetische Proportion bilden, z. B. 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34 u. s. w.

Die Zahlen selbst heißen **Glieder**, der konstante Unterschied zwischen zwei auf einander folgenden (in obigem Beispiel die Zahl 3) heißt **Name**, **Unterschied** oder **Differenz** der Progression. Die Zahl, welche angiebt, das wie vielte Glied irgend eins der

Reihe, vom ersten ab gerechnet, ist, heißt **Index** oder **Stellenzahl** des Gliedes. (In obigem Beispiel ist 4 der Index von 13.) Eine Progression heißt **steigend** oder **fallend**, je nachdem die Glieder derselben zu- oder abnehmen; eine arithmetische Reihe wird steigend oder fallend sein, je nachdem die Differenz positiv oder negativ ist.

§. 252.

Nennt man das erste Glied a, die Differenz d, so sind die Glieder der Reihe nach:

$$\begin{array}{cccccc} 1. & 2. & 3. & 4. & & 17. \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & \ldots\ldots & a+16d, \ldots\ldots, \end{array}$$

und versteht man unter z das nte Glied der Reihe, so muß

$$z = a + (n-1)\,d \text{ sein.}$$

Dies letztere Glied wird auch das **allgemeine Glied** der Progression genannt.

§. 253.

Ist in einer arithmetischen Progression das erste Glied gleich a, die Differenz gleich d, die Anzahl der Glieder gleich n, das nte Glied gleich z und die Summe der n ersten Glieder gleich s, so kann man diese Summe auf zwei verschiedene Arten schreiben, je nachdem man mit dem ersten oder mit dem letzten Gliede beginnt, nämlich:

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (z-2d) + (z-d) + z.$$
$$s = z + (z-d) + (z-2d) + \ldots + (a+2d) + (a+d) + a.$$

Addirt man beide Reihen, so erhält man:

$$2s = (a+z) + (a+z) + (a+z) \ldots + (a+z) + (a+z) + (a+z).$$

Statt aber a + z, n mal als Summand zu setzen, kann man a + z mit n multipliciren, dann ist:

$$2s = (a+z)\,n, \text{ also}$$
$$s = (a+z)\frac{n}{2}.$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth von z aus §. 252., so ist noch ferner:

$$s = [2a + (n-1)\,d]\frac{n}{2}.$$

§. 254.

Aus §. 253. ergiebt sich zugleich, daß die Summen irgend zweier Glieder, welche gleich weit von beiden Enden abstehen, unter einander gleich, und zwar allemal gleich der Summe des

ersten und letzten Gliedes sind, was aber auch aus nachstehender Betrachtung folgt:

Ist p das mte Glied vom Anfang der Reihe, so ist

1) $p = a + (m - 1) d$; und ist q das mte Glied vom Ende der Reihe, so findet man dies, indem man z als das erste Glied und $-d$ als Differenz betrachtet, dann ist

2) $q = z - (m - 1) d$.

Addirt man die Gleichungen Nr. 1. und Nr. 2., so erhält man $p + q = a + z$.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so ist natürlich das mittelste Glied gleich der halben Summe des ersten und letzten Gliedes.

§. 255.

Zwischen den 5 Zahlen a, d, n, z und s hat man durch die zwei Formeln:

$$1)\ z = a + (n - 1) d \text{ und}$$

$$2)\ s = (a + z) \frac{n}{2}$$

zwei von einander unabhängige Gleichungen; man kann daher, wenn drei dieser Zahlen gegeben sind, die beiden anderen bestimmen.

Beispiele. I. Gegeben a, d, z; gesucht n und s.

n aus 1) $z - a = (n - 1) d$

$$\frac{z - a}{d} = n - 1, \text{ also}$$

$$\frac{z - a}{d} + 1 = n.$$

n in 2) $s = (a + z) \frac{z - a + d}{2d}$

$$s = \frac{z^2 - a^2 + d (z + a)}{2d}.$$

II. Gegeben a, d, s; gesucht z und n.

n aus 1) $n = \frac{z - a + d}{d}$ (siehe Beispiel I.).

n in 2) $s = (a + z) \frac{z - a + d}{2d}$

$$2ds = (a + z)(z - a + d)$$

$$2ds = z^2 - a^2 + dz + ad$$

$$2ds + a^2 - ad = z^2 + dz$$

$$z = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + 2ds + a^2 - ad}$$

$$z = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + 2ds}.$$

$$z \text{ in } 1) - \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + 2ds} = a + (n-1)d$$

$$- \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + 2ds} - a = (n-1)d$$

$$\frac{-d-2a}{2d} \pm \frac{1}{d}\sqrt{\left(a - \frac{d}{2}\right)^2 + 2ds} + 1 = n.$$

$$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \frac{1}{2d}\sqrt{8ds + (d-2a)^2}.$$

III. Gegeben $a = 5$, $z = 23$, $s = 392$; gesucht n und d. Setzt man die gegebenen Werthe in die Formeln 1 und 2, so ist:

$$1)\ 23 = 5 + (n-1)d$$

$$2)\ 392 = (5+23)\frac{n}{2}$$

$$n \text{ aus } 2)\ 784 = 28 . n, \text{ also}$$

$$n = 28.$$

$$n \text{ in } 1)\ 23 = 5 + 27 . d$$

$$d = \tfrac{2}{3}.$$

§. 256.

Vielen Aufgaben liegen arithmetische Progressionen zu Grunde, ohne daß dies geradezu in denselben ausgesprochen ist, man hat dann immer sogleich zu ermitteln, welche Zahlen der Aufgabe die Glieder der Reihen bilden, und namentlich, welche der Buchstaben a, d, n, z und s gegeben, und welche die gesuchten sind.

Beispiele. I. Wie groß ist die Summe der n ersten ungeraden Zahlen?

Auflösung. Die erste ungerade Zahl ist 1, und da jede folgende durch Addition von 2 aus der vorhergehenden entsteht, so bilden dieselben eine arithmetische Progression, in welcher $a = 1$, $d = 2$ und $n = n$ ist. Setzt man diese Werthe in die beiden Formeln des §. 255., so ist:

$$1)\ z = 1 + (n-1)2 \text{ und}$$

$$2)\ s = (1+z)\frac{n}{2}$$

$$z \text{ aus } 1 \text{ in } 2)\ s = [2 + (n-1)2]\frac{n}{2} \text{ oder}$$

$$s = (2 + 2n - 2)\frac{n}{2}, \text{ also}$$

$$s = n^2.$$

II. Wie heißt die Summe der 1000 ersten Zahlen?

Auflösung. Die Zahlen selbst bilden eine arithmetische Progression, da jede folgende um 1 größer als die vorhergehende ist. Hier ist $a = 1$, $d = 1$ und $n = 1000$, mithin

$$1)\ z = 1 + (1000 - 1) = 1000$$
$$2)\ s = (1 + z)\,500$$
z aus 1 in 2) $s = 1001 \,.\, 500$
$$s = 500500.$$

§. 257.

Zahlenreihen, in welchen die Unterschiede der auf einander folgenden Glieder eine arithmetische Progression bilden, nennt man arithmetische Reihen zweiter Ordnung.

Bilden die Unterschiede der Glieder einer Zahlenreihe eine Reihe 2ter Ordnung, so nennt man die Zahlenreihe eine arithmetische Reihe dritter Ordnung u. s. w.

z. B. 1) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
Unterschiede 3 5 7 9 11 ....
Die Quadrate der natürlichen Zahlen bilden also eine Reihe 2ter Ordnung.

2) 1, 8, 27, 64, 125, 216, ...
Unterschiede 7 19 37 61 91 ....
2te Unterschiede 12 18 24 30 ....
Die Kuben der natürlichen Zahlen bilden also eine Reihe dritter Ordnung.

§. 258.

1) Da bei einigen späteren Untersuchungen die Summen der Quadrate und Kuben der natürlichen Zahlenreihe gebraucht werden, so sollen in dem Folgenden diese Summen entwickelt werden, ohne jedoch auf eine vollständige Theorie dieser Reihen einzugehen.

Es ist $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$.

Setzt man hierin der Reihe nach für n die Zahlen 0, 1, 2, 3 .... bis n, dann erhält man:

$$1^3 = 1$$
$$2^3 = 1^3 + 3 \,.\, 1^2 + 3 \,.\, 1 + 1$$
$$3^3 = 2^3 + 3 \,.\, 2^2 + 3 \,.\, 2 + 1$$
$$4^3 = 3^3 + 3 \,.\, 3^2 + 3 \,.\, 3 + 1$$
$$5^3 = 4^3 + 3 \,.\, 4^2 + 3 \,.\, 4 + 1$$
$$6^3 = 5^3 + 3 \,.\, 5^2 + 3 \,.\, 5 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 = (n-1)^3 + 3\,(n-1)^2 + 3\,(n-1) + 1$$
$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Addirt man diese Gleichungen, so heben sich die Kuben der natürlichen Zahlen von 1^3 bis n^3 fort, und man erhält:

$$(n+1)^3 = 3(1^2+2^2+3^2 \ldots . n^2) + 3(1+2+3 \ldots . n) + n + 1.$$

Nun folgt aus §. 253, daß $1+2+3+\ldots . n = \frac{n(n+1)}{2}$ ist, setzt man nun $1^2+2^2+3^2+\ldots . n^2 = s$, so folgt

$$(n+1)^3 = 3s + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1 \text{ und}$$

$$2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1) = 6s, \text{ oder}$$

$$(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2) = 6s$$

$$(n+1)(2n^2+n) = 6s \text{ und endlich}$$

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Beispiel. Die Summe der zehn ersten Quadratzahlen ist hiernach

$$s = \frac{10(10+1)(2.10+1)}{6} = \frac{10.11.21}{6} = 385.$$

Durch einfache Rechnung erhält man:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Setzt man hierin für n der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ... bis n, so ist

$$1^4 = 1$$
$$2^4 = 1^4 + 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$
$$3^4 = 2^4 + 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1$$
$$4^4 = 3^4 + 4.3^3 + 6.3^2 + 4.3 + 1$$
$$5^4 = 4^4 + 4.4^3 + 6.4^2 + 4.4 + 1$$
$$6^4 = 5^4 + 4.5^3 + 6.5^2 + 4.5 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^4 = (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$
$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Bei der Addition dieser Gleichungen heben sich die vierten Potenzen der natürlichen Zahlenreihe fort, und wenn man für die Summe der natürlichen Zahlen $1+2+3+\ldots . n = \frac{n(n+1)}{2}$ und für die Summe ihrer Quadrate $1^2+2^2+3^2+\ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, dagegen für die Summe ihrer Kuben s setzt, so ergiebt sich:

$$(n+1)^4 = 4s + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n + 1$$

und

$$(n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] = 4s$$

$$(n+1)[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n(2n+1) - 2n - 1] = 4s$$

$(n + 1)(n^3 + n^2) = 4s$

$n^2(n + 1)^2 = 4s$, und endlich

$$s = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Beispiel. Die Summe der 10 ersten Kubikzahlen ist also:

$$s = \left[\frac{10 \,.\, (10 + 1)}{2}\right]^2 = \left(\frac{10 \,.\, 11}{2}\right)^2 = 3025.$$

2) Aus dem Vorhergehenden folgt:

1) $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots . \frac{n-1}{n}\right)$
für $n = \infty$, gleich $\frac{1}{2}$.

2) $\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots . \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$
für $n = \infty$, gleich $\frac{1}{3}$.

3) $\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \ldots . \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right]$
für $n = \infty$, gleich $\frac{1}{4}$.

§. 259.

Wenn a, b, c . . . Glieder einer arithmetischen Reihe sind, dann kann man zwischen je zwei Glieder andere Zahlen einschalten (interpoliren), so daß diese Zahlen mit der ursprünglichen Reihe wieder eine arithmetische Progression bilden.

Sollen zwischen den Gliedern a und b einer arithmetischen Progression erster Ordnung n Glieder eingeschaltet werden, dann ist a als erstes und b als letztes Glied einer Progression von $n + 2$ Gliedern zu betrachten. Nennt man die Differenz der neuen Reihe δ, und die der ursprünglichen Reihe d, so ist:

$$b = a + (n + 1)\delta \text{ oder}$$

$$b - a = (n + 1)\delta, \text{ und da } b - a = d \text{ ist,}$$

$$\delta = \frac{d}{n+1}.$$

Da nun die Logarithmen sehr großer auf einander folgender Zahlen sehr nahe eine arithmetische Progression erster Ordnung bilden, so läßt sich nach dem Obigen aus den Logarithmen zweier Zahlen der Logarithmus einer zwischen beiden liegenden berechnen.

Z. B. Man soll aus log a und log (a + 1), wenn a eine fünfstellige Zahl ist, log a, $\alpha\beta$ berechnen.

Schaltet man zwischen log a und log (a + 1) eine Anzahl von q Gliedern ein, dann ist log a, $\alpha\beta$ das $1 + \alpha\beta$te Glied dieser Reihe. Wird nun log (a + 1) — log a mit d bezeichnet, und nennt man die

Differenz der neuen Reihe δ, dann ist

$$\delta = \frac{d}{100}, \text{ also}$$

$$\log a,\ \alpha\beta = \log a + \alpha\beta \cdot \frac{d}{100}$$

$$= \log a + \alpha \cdot \frac{d}{10} + \beta \cdot \frac{d}{100}. \quad \text{(Vergleiche §. 201.)}$$

In derselben Weise kann man bei anderen Tabellen interpoliren, wenn nur die oben gemachte Voraussetzung stattfindet.

Zweites Kapitel.
Von den geometrischen Progressionen.

§. 260.

Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, in welcher der Quotient zweier auf einander folgender Glieder immer derselbe ist; oder mit anderen Worten, in welcher je drei auf einander folgende Glieder eine stetige geometrische Progression bilden, z. B.

4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 u. s. w.

Der konstante Quotient zweier auf einander folgender Glieder (in obigem Beispiel die Zahl 2) heißt der Quotient der Reihe.

Wenn der Quotient negativ ist, so werden die Glieder abwechselnd positiv und negativ; ist der Quotient positiv, aber größer als 1, so ist die Reihe steigend, ist er positiv, aber kleiner als 1, also ein ächter Bruch, so ist sie fallend.

§. 261.

Ist a das erste Glied und q der Quotient, so heißen die Glieder der Reihe nach:

$$\begin{matrix} 1. & 2. & 3. & 4. & & 15. \\ a, & aq, & aq^2, & aq^3, & \ldots\ldots & aq^{14}, \ldots\ldots, \end{matrix}$$

bezeichnet man daher das nte Glied dieser Reihe mit z, so ist:

$$z = aq^{n-1}.$$

§. 262.

$$\text{Es ist } \frac{aq}{a} = \frac{aq^2}{aq} = \frac{aq^3}{aq^2} = \ldots\ldots \frac{aq^{n-1}}{aq^{n-2}} = q,$$

folglich ist nach §. 39.

$$\frac{aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots aq^{n-1}}{a + aq + aq^2 + \ldots\ldots aq^{n-2}} = q.$$

Bezeichnet man nun, wie bei den arithmetischen Progressionen, die Summe der n ersten Glieder der geometrischen Progression mit s, so erhält man

$$\frac{s-a}{s-z} = q, \text{ also}$$
$$s - a = qs - qz, \text{ oder}$$
$$s(1-q) = a - qz, \text{ also}$$
$$s = \frac{a-qz}{1-q} = \frac{qz-a}{q-1}.$$

Setzt man für z den Werth aq^{n-1}, so erhält man auch noch:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

§. 263.

Ist p das mte Glied vom Anfang der Reihe, so ist

1) $p = aq^{m-1}$, und ist v das mte Glied vom Ende der Reihe, so findet man dies, indem man z als das erste Glied und $\frac{1}{q}$ als Quotient betrachtet, dann ist:

2) $v = z \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{m-1} = \frac{z}{q^{m-1}}$.

Multiplicirt man die Gleichungen Nr. 1. und Nr. 2., so ist

$$p \cdot v = a \cdot z.$$

Es sind daher die Produkte zweier beliebiger Glieder, welche von beiden Enden der Progression gleich weit abstehen, allemal einander gleich, und zwar stets gleich dem Produkte des ersten und letzten Gliedes; hat daher die Progression eine ungerade Anzahl von Gliedern, so ist das mittelste Glied die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem ersten und letzten Gliede.

§. 264.

Zwischen den 5 Zahlen a, q, n, z und s hat man durch die zwei Formeln:

1) $z = aq^{n-1}$

2) $s = \frac{qz-a}{q-1}$ oder $s = a \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$

zwei von einander unabhängige Gleichungen, man kann also, wenn 3 dieser Zahlen gegeben sind, die beiden anderen finden. Einige der hier vorkommenden Fälle führen aber zu höheren, andere zu transcendenten Gleichungen.

Beispiele. I. Gegeben $a=1$, $q=2$, $n=13$; gesucht z und s.
Es ist: 1) $z = 1 \cdot 2^{12} = 4096$.

2) $s = \frac{2 \cdot 4096 - 1}{2 - 1} = 8191.$

II. Gegeben $q = 7$, $n = 7$, $s = 411771$; gesucht a und z.
Es ist: 1) $z = a \cdot 7^6$

2) $411771 = a \cdot \frac{7^7 - 1}{6}$.

a aus 2) $a = \frac{6 \cdot 411771}{7^7 - 1} = 3.$

a in 1) $z = 3 \cdot 7^6 = 352947.$

III. Gegeben $a = 20$, $n = 3$, $s = 95$; gesucht q und z.
Es ist: 1) $z = 20 \cdot q^2$

2) $95 = 20 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1}$

Die kubische Gleichung Nr. 2. reducirt sich sofort auf eine quadratische, wenn man die Division mit $q - 1$ in $q^3 - 1$ ausführt, dann erhält man:

3) $95 = 20(q^2 + q + 1)$, oder
$19 = 4q^2 + 4q + 4$, oder
$15 = 4q^2 + 4q$, oder
$\frac{15}{4} = q^2 + q$, folglich
$q = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{4}}$
$q = -\frac{1}{2} \pm \frac{4}{2}$
$q = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2}. \end{cases}$

Setzt man nun den ersten Werth von q in Nr. 1., so ist
$z = 20 \cdot (\frac{3}{2})^2 = 45;$
setzt man aber den zweiten Werth von q in Nr. 1., so ist
$z = 20 \cdot (-\frac{5}{2})^2 = 125.$

Die Progression heißt daher
entweder 20, 30, 45;
oder 20, −50, 125.

§. 265.

Eine besondere Berücksichtigung verdienen die fallenden geometrischen Progressionen, bei welchen nach §. 260. der Quotient ein ächter Bruch sein muß. Denkt man sich nämlich eine solche fallende geometrische Progression bis ins Unendliche fortgesetzt, so muß, da die Glieder immer kleiner werden, das letzte Glied, wenn es ein solches giebt, um unendlich wenig von Null verschieden, d. h. selbst gleich Null sein. Setzt man aber in die Formel Nr. 2. des §. 264. $z = 0$, so ist

$$s = \frac{-a}{q - 1} = \frac{a}{1 - q};$$

wodurch die Summe der unendlich vielen Glieder in einen endlichen Ausdruck verwandelt worden ist.

Dasselbe Resultat erreicht man auch dadurch, daß man in die Formel $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, $n = \infty$ setzt, dann ist nämlich $q^n = q^\infty = 0$, da q ein ächter Bruch ist, folglich muß auch $aq^n = aq^\infty = 0$ sein, wodurch

$$s = \frac{-a}{q-1} = \frac{a}{1-q} \text{ wird.}$$

Ist z. B. $a = 2$, $q = \frac{1}{3}$ und $n = \infty$, so heißt die Reihe

$$2, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{2}{27}, \tfrac{2}{81}, \tfrac{2}{243}, \tfrac{2}{729}, \ldots\ldots\ldots 0, \text{ also ist}$$

$$s = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$$

§. 266.

Einen periodischen Decimalbruch kann man als Summe einer fallenden geometrischen Progression betrachten und durch obige Summenformel in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln, z. B. 0,434343 . . . kann man auch schreiben:

$$\begin{array}{l} 0{,}43 \\ +\ 0{,}0043 \\ +\ 0{,}000043 \\ +\ 0{,}00000043 \text{ u. s. w. bis ins Unendliche.} \end{array}$$

Dies ist aber die Summe einer geometrischen Progression, in welcher $a = 0{,}43$, $q = 0{,}01$ und $n = \infty$ ist, also ist

$$s = \frac{a}{1-q} = \frac{0{,}43}{1-0{,}01} = \frac{0{,}43}{0{,}99} = \frac{43}{99}.$$

Bei einem unvollständig- oder gemischt-periodischen Decimalbruch muß man die Perioden erst von dem nicht periodischen Theile sondern, da nur die ersteren sich als die Summe einer geometrischen Progression betrachten lassen.

z. B. $0{,}23651651651\ldots = 0{,}23 + 0{,}00651$
$+\ 0{,}00000651$
$+\ 0{,}00000000651$ u. s. w.

Hier ist $a = 0{,}00651$, $q = 0{,}001$ und $n = \infty$, also

$$s = \frac{0{,}00651}{1 - 0{,}001} = \frac{0{,}00651}{0{,}999} = \frac{651}{99900}.$$

Der Decimalbruch selbst ist daher gleich

$$0{,}23 + \frac{651}{99900} = \frac{23}{100} + \frac{651}{99900} = \frac{23628}{99900}.$$

Diese Resultate stimmen mit den früher in der Lehre von den Decimalbrüchen im §. 103. entwickelten genau überein.

Uebungen zum neunten Abschnitt.

A. Arithmetische Progressionen.

1. In einer arithmetischen Progression ist
$a = 5,\ d = 2,\ n = 12,\ z = 27$ und $s = 192$.
Man soll aus je drei dieser Stücke die beiden anderen berechnen. Es sind der Reihe nach als gegeben zu betrachten: a, d, n; a, d, z; a, d, s; a, n, z; a, n, s; a, z, s; d, n, z; d, n, s; d, z, s; n, z, s.
2. $a = 2,\ d = 3,\ n = 22$, giebt $z = 65$ und $s = 737$.
3. $a = 6,\ z = 2833,\ n = 38$ giebt $s = 53941$ und $d = 76\frac{15}{37}$.
4. $a = -5,\ d = 9,\ n = 41$ giebt $z = 355,\ s = 7175$.
5. $a = -9,\ d = 4,\ z = 27$ giebt $n = 10,\ s = 90$.
6. $d = \frac{1}{4},\ n = 16,\ z = 10\frac{3}{4}$ giebt $a = 7,\ s = 142$.
7. $a = -28,\ d = \frac{1}{2},\ s = -790{,}5$ giebt $n = 51$ od. 62, $z = -3$ od. $2\frac{1}{2}$.
8. $z = -37,\ d = -\frac{2}{3},\ s = -1024$ giebt $n = 64$ od. 48, $a = 5$ od. $-5\frac{2}{3}$.
9. $a = 10,\ z = 100,\ n = 13$ giebt $d = 7{,}5,\ s = 715$.
10. $d = \frac{1}{2},\ a = 5,\ s = 140$ giebt $n = 16,\ z = 12{,}5$.
11. $a = 8,\ z = 103,\ s = 1110$ giebt $d = 5,\ n = 20$.
12. $a = 100,\ z = -14,\ n = 20$ giebt $d = -6,\ s = 860$.
13. $z = 24,\ d = \frac{5}{7},\ n = 22$ giebt $a = 9,\ s = 363$.
14. $a = 5 - x,\ z = 5\ (1 + 63x),\ n = 80$ giebt $d = 4x$,
$s = 400 + 12560x$.
15. $a = -6,\ d = \frac{3}{4},\ s = 146\frac{1}{4}$ giebt $z = 15\frac{3}{4},\ n = 30$.
16. $z = 18{,}53;\ s = 628{,}43;\ d = 0{,}27$ giebt $a = 3{,}14,\ n = 58$.
17. Gegeben das erste Glied $= 4a^2$, das zweite Glied $= 0$ und die Anzahl der Glieder $= 41$; gesucht z und s.
Antw. $z = -156a^2$ und $s = -3116a^2$.
18. Gegeben das erste Glied $= 1002$, das letzte Glied $= 2$ und das vorletzte Glied $= 10$; gesucht n und s.
Antw. $n = 126$ und $s = 63252$.
19. Gegeben das erste Glied $= x + 254$; das letzte Glied $= x - 2$, das vorletzte Glied $= x + 2$; gesucht n und s.
Antw. $n = 65$ und $s = 65x + 8190$.
20. Das 7te Glied ist -6, das 37ste $15\frac{3}{4}$, die Anzahl der Glieder $= 55$; wie groß sind d, a, z und s?
Antw. $d = \frac{29}{40},\ a = -10\frac{7}{20},\ z = 28\frac{4}{5}$, und $s = 507\frac{3}{8}$.
21. Zwischen 7 und 13 sollen 8 Glieder so eingeschaltet (interpolirt) werden, daß eine arithmetische Progression entsteht. Wie heißen diese Glieder?
Antw. $7\frac{2}{3},\ 8\frac{1}{3},\ 9,\ 9\frac{2}{3},\ 10\frac{1}{3},\ 11,\ 11\frac{2}{3},\ 12\frac{1}{3}$.
22. Zwischen a und b sollen n Glieder interpolirt werden, wie heißt das pte der eingeschalteten Glieder?
Antw. $a + p \cdot \frac{b - a}{n + 1}$.
23. Wie groß ist die 60ste ungerade Zahl?
Antw. 119.

24. Wie groß ist die Summe der n ersten geraden Zahlen?
Antw. $n(n+1)$.

25. Jemand hat eine gleiche Anzahl der ersten unmittelbar auf einander folgenden sowohl geraden als ungeraden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe addirt und zur Summe 78 erhalten. Wieviel gerade und ungerade Zahlen wurden addirt?
Antw. Die ersten 6 geraden und die ersten 6 ungeraden Zahlen.

26. Eine arithmetische Progression beginnt mit -10 und endet mit 12, und es ist die Summe aller Glieder dem letzten Gliede gleich; aus wieviel Gliedern besteht dieselbe?
Antw. Aus 12 Gliedern.

27. Karl V erhielt 1541 von der Stadt Nürnberg einen großen goldenen Becher mit hundert Stücken Gold, von denen das kleinste einen, das nächst größere zwei, das dritte drei Gulden und so fort werth war. Wieviel Gulden war der Inhalt des Bechers werth?
Antw. 5050.

28. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in arithmetischer Progression. Der Umfang ist $= 84$ Meter. Wie groß sind die Seiten? Antw. 21,28 und 35 Meter.

29. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen in arithmetischer Progression. Der Flächeninhalt ist $= 216$ □m. Wie groß sind die Seiten? Antw. 18,24 und 30 Meter.

30. Sämmtliche Leute eines Regiments können in der Form eines gleichseitigen Dreiecks so aufgestellt werden, daß in dem ersten Gliede 1 Mann, in dem zweiten 2, in dem dritten 3 u. s. w. stehen. Werden die Reserven eingezogen, so fehlen noch 385 Mann, um sie in einem vollen Quadrate aufstellen zu können, in dessen Seite 5 Mann mehr stehen, als in der Seite des gleichseitigen Dreiecks. Wie stark ist das Regiment ohne die Reserve-Mannschaft?
Antw. 820 Mann.

31. A reist von Berlin ab und macht am ersten Tage nur 1, am zweiten 2, am dritten 3 Meilen und so an jedem Tage eine Meile mehr als am vorhergehenden. 5 Tage später reist B auf demselben Wege und macht täglich 12 Meilen; nach wieviel Tagen treffen beide zusammen?
Antw. B überholt den A nach 3 Tagen und wird von diesem am Ende seines 10ten Reisetages wieder überholt.

B. Geometrische Progressionen.

1. In einer geometrischen Progression ist

$$a=3,\ q=2,\ n=5,\ z=48 \text{ und } s=93.$$

Man soll aus je drei dieser Stücke, so weit dies möglich ist, die beiden anderen berechnen. Es sind der Reihe nach als gegeben zu betrachten: **a, q, n; a, q, z; a, q, s; a, n, z; a, z, s; q, n, z; q, n, s q, z, s.**

2. $a = \frac{1}{2}$, $q = 3$, $n = 5$ giebt $z = 40\frac{1}{2}$, $s = 60\frac{1}{2}$.
3. $a = 4$, $n = 2$, $s = 24$ giebt $z = 20$, $q = 5$.
4. $q = 2$, $n = 7$, $s = 254$ giebt $z = 128$, $a = 2$.
5. $q = 2$, $n = 7$, $z = -192$ giebt $a = -3$, $s = -381$.
6. $a = 3$, $q = 2$, $n = 10$ giebt $z = 1536$; $s = 3069$.
7. $a = \frac{1}{2}$, $q = 3$, $n = 12$ giebt $z = 88573{,}5$; $s = 132860$.
8. $a = 6$, $z = 100$, $n = 17$ giebt $q = 1{,}19224$; $s = 588{,}972$.
9. $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $n = \infty$ giebt $z = 0$, $s = 2$.
10. $a = 1$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = \infty$ giebt $z = 0$, $s = \frac{2}{3}$.
11. $a = 40$, $q = \frac{3}{7}$, $s = 70$ giebt $n = \infty$, $z = 0$.
12. $a = p$, $n = 4$, $z = p \cdot r^3$ giebt $q = r$, $s = p\,(1 + r + r^2 + r^3)$.
13. $q = b$, $s = b\,(1 + b + b^2 + b^3)$, $z = b^4$ giebt $a = b$, $n = 4$.
14. $q = b^{-\frac{1}{4}}$, $z = b^{-2}$, $n = 11$ giebt $a = \sqrt{b}$, $s = \dfrac{1 - b^2 \sqrt[4]{b^3}}{b^2\,(1 - \sqrt[4]{b})}$.
15. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots\ldots$ ohne Ende $= \frac{3}{4}$.
16. $1 - \sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{5}} + \ldots\ldots = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{4}$.
17. $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\,(3 + \sqrt{3})$.
18. $1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3}} + \ldots\ldots = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} + 1}$.
19. Die Zahl 11310,5 so in 5 Theile zu zerlegen, daß jeder folgende das zwölffache des vorhergehenden werde. Wie heißen diese Theile?
    Antw. $\frac{1}{2}$, 6, 72, 864, 10368.
20. In einer geometrischen Progression betragen die ersten 2 Glieder zusammen 16, das siebente und achte Glied zusammen 11664; wie heißen diese Glieder?
    Antw. Das erste 4, das zweite 12, das siebente 2916 und das achte 8748.
21. Das erste Glied heißt $\sqrt{a}$, das zweite 1, wie groß ist das 16te Glied z und die Summe s der ersten 16 Glieder?
    Antw. $z = a^{-7}$, $s = \dfrac{a^{-7} - a}{1 - \sqrt{a}}$.
22. Das zweite Glied ist $= -9$, das achte $= -6561$, wie groß ist das erste Glied a und die Summe s der ersten acht Glieder?
    Antw. $a = \pm 3$ und $s = -9840$ oder $= -4920$.
23. Das zweite Glied ist $= \sqrt[3]{x}$, das 7te $= \dfrac{1}{x}\sqrt{x}$; wie groß ist das erste Glied a und die Summe s der ersten 7 Glieder?
    Antw. $a = \sqrt{x}$ und $s = \dfrac{\sqrt[6]{x^5} - x^2}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})}$.
24. Das erste Glied ist $= 1{,}5$; das zweite $= 0{,}5$; wie groß ist die Summe s, wenn $n = \infty$ ist?
    Antw. 2,25.

25. Wie groß ist die Summe der unendlich vielen Glieder einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $= a^m$ und deren zweites $= a^{-m}$ ist, wobei $a > 1$ ist?

Antw. $s = \frac{a^{3m}}{a^{2m} - 1}$.

26. Den periodischen Decimalbruch 0,04545 .... in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Antw. $\frac{1}{22}$.

27. Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; die Differenz der größten und kleinsten ist $= 15$; die Differenz zwischen den Quadraten der größten und kleinsten verhält sich zur Summe der Quadrate aller drei Zahlen, wie 5 : 7. Welches sind diese Zahlen?

Antw. 20, 10 und 5.

28. Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; ihre Summe ist $= 13$, das Produkt aus dem mittleren Gliede mal der Summe der beiden äußeren Glieder $= 30$; wie heißen die Zahlen?

Antw. 1, 3 und 9.

29. Ein König in Indien, Namens Shehram, verlangte, nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers Asephad, daß Sessa, der Erfinder des Schachspiels, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Waizenkörner, die herauskommt, wenn 1 für das erste Feld des Schachbrettes, 2 für das zweite, 4 für das dritte, und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viele Körner, als für das vorhergehende gerechnet werden. Als zusammengezählt wurde, fand man zum Erstaunen des Königs eine ungeheure Summe. — Welche?

Antw. 18446744073709551615; eine Summe, welche auf der ganzen Erde kaum in 70 Jahren gewonnen werden könnte, wenn man auch alles feste Land zum Anbau von Waizen benutzte.

30. Der Sophist Zeno erklärte einst, er wolle beweisen, daß Niemand im Stande sei, eine Schildkröte einzuholen, die in einer Entfernung von einem Stadium vor ihm hergehe. Er that dies folgendermaßen: Gesetzt, die Schildkröte habe nur den zwölften Theil der Geschwindigkeit, so wird sie in der Zeit, die man gebraucht, um das Stadium zurückzulegen, $\frac{1}{12}$ Stadium weiterkommen; durchläuft man diese Strecke, so ist sie nicht mehr da, wo sie war, sondern $\frac{1}{144}$ Stadium weiter u. s. f. Obgleich also der Zwischenraum immer kleiner wird, kann man sie nie einholen! Ist dies richtig?

Antw. Nein. Vergleiche §. 265. Es ist hier $a = 1$, $q = \frac{1}{12}$, also $s = 1\frac{1}{11}$.

Anhang.

Die allgemeine Größenlehre

oder

die Lehre von den benannten Zahlen.

§. 267.

Nachdem die Gesetze der Zahlenlehre der Betrachtung unterworfen sind, muß noch gezeigt werden, welcher Gebrauch von denselben zu machen ist, wenn man es mit benannten Zahlen zu thun hat.

Aus der allgemeinen Einleitung geht hervor, daß in der benannten Zahl allemal zweierlei enthalten ist, nämlich die Einheit und die unbenannte Zahl (das Maaß), durch welche die benannte Zahl auf die Einheit bezogen ist.

Größen heißen gleichartig, sobald sie entweder schon durch dieselbe Einheit ausgedrückt sind, oder durch dieselbe Einheit ausgedrückt werden können; im ersteren Falle heißen sie auch gleichnamig. 2 Thaler und 3 Thaler, oder 2 Thaler und 10 Silbergroschen sind gleichartige, 2 Thaler und 3 Pfund ungleichartige Größen; dagegen sind 2 Thaler und 3 Thaler auch gleichnamige Größen.

Nur gleichartige Größen lassen sich mit einander verbinden.

§. 268.

Da man nur mit den Maaßen der Größen rechnen kann, so haben die vier ersten Operationen bei benannten Zahlen folgende Bedeutung:

1) Zwei gleichnamige Zahlen addiren heißt: die Einheiten der einen denen der anderen hinzuzählen.

2) Zwei gleichnamige Zahlen von einander subtrahiren heißt: die Einheiten der einen von denen der anderen hinwegnehmen. Ist z. B. E irgend eine beliebige Einheit, und sind a und b beliebige absolute ganze Zahlen, so ist:

$$aE \pm bE = (a \pm b)\,E.$$

Hieraus folgt, daß die Addition und Subtraktion zweier gleichnamiger Zahlen an ihren Maaßen ausgeführt wird, wobei die Einheit dieselbe bleibt.

Ist ferner $b > a$, so wäre $aE - bE = -(b - a)E$. Da es aber dem Begriffe nach keine negativen, mithin auch keine positiven, und allgemein keine entgegengesetzten Größen giebt, so muß bei der Subtraktion gleichnamiger Zahlen der Minuendus stets größer als der Subtrahendus sein.

3) Bei der **Multiplikation** soll eine benannte Zahl so oft genommen werden, wie der Multiplikator, der daher immer eine unbenannte Zahl sein muß, anzeigt, z. B.

$$(aE) . b = aE + aE + aE + \ldots . (b \text{ mal})$$
$$= [a + a + a + \ldots . (b \text{ mal})] . E.$$

Das Produkt $= (ab) . E$ wird durch Multiplikation der unbenannten Zahlen gebildet und hat mit dem Multiplikandus gleiche Benennung.

4) Bei der **Division** ist der Dividendus stets eine benannte Zahl, der Divisor kann entweder benannt oder unbenannt sein. Im ersteren Falle ist der Quotient unbenannt und giebt an, der wievielte Theil der Divisor vom Dividendus ist; im zweiten Falle ist der Quotient gleichnamig mit dem Dividendus und die Division ein eigentliches Theilen, z. B.

$\frac{abE}{bE} = a$, d. h. bE ist der ate Theil von abE; und

$\frac{abE}{b} = aE$, d. h. aE ist der bte Theil von abE.

§. 269.

Ist eine Größe A das n fache einer anderen Größe B, unter n eine ganze Zahl verstanden, so heißt B ein **aliquoter Theil** von A, und man sagt, die Größe A kann durch die Größe B ohne Rest gemessen werden. Hieraus folgt zugleich, daß dann auch jeder aliquote Theil von B ein aliquoter Theil von A sein muß. z. B. 1 Pfund ist ein aliquoter Theil eines Centners, da 1 Ctr. = 100 Pfund ist.

§. 270.

Ist eine Größe A durch einen Bruch $\frac{m}{n}$ auf die Einheit E_1 bezogen, ist also $A = \frac{m}{n} E_1$, so heißt dies: A enthalte den nten

Theil von E_1 m mal; wäre nun wieder E_1 durch die Zahl $\frac{p}{q}$ auf die Einheit E_2 bezogen, also $E_1 = \frac{p}{q} . E_2$, so ist $A = \frac{mp}{nq} . E_2$.

Hierin besteht das Reduciren einer benannten Zahl auf eine andere Einheit, die entweder ein Vielfaches oder das Vielfache eines aliquoten Theils der ursprünglichen Einheit sein kann. z. B. $A = \frac{3}{5}$ Rthlr.; 1 Rthlr. = 30 Sgr., also $A = \frac{3}{5} . 30$ Sgr. = 18 Sgr.

Das, was oben über die 4 Operationen mit benannten Zahlen gesagt wurde, bezog sich zwar nur auf solche, deren Maaße ganze Zahlen waren, ist aber offenbar allgemein gültig, da man jede gebrochene benannte Zahl durch Einführung einer kleineren Einheit als ganze benannte Zahl darstellen kann.

§. 271.

Eine benannte Zahl wird auch oft als Summe mehrerer anderer gleichartiger, aber nicht gleichnamiger Größen ausgedrückt, wobei man die dazwischen stehenden plus-Zeichen fortläßt. Man pflegt eine solche Zahl eine mehrfach benannte Zahl zu nennen, z. B. 3 Rthlr. 6 Sgr. 5 Pf. Mit Hülfe des vorigen §. ist es aber leicht, dieselbe als einfach benannte Zahl darzustellen.

Gesetzt, es wäre $A = mE_1 + nE_2 + pE_3 + qE_4$, worin E_1, E_2, E_3, E_4 die verschiedenen Einheiten bezeichneten, die so von einander abhängig sind, daß

$$E_1 = a . E_2$$
$$E_2 = b . E_3$$
$$E_3 = c . E_4 \text{ wäre.}$$

Will man nun die Größe A allein durch die Einheit E_2 ausdrücken, so hat man zu bedenken, daß

$E_1 = aE_2$, also $mE_1 = amE_2$

$E_2 = E_2$, also $nE_2 = nE_2$

$E_3 = \frac{1}{b} E_2$, also $pE_3 = \frac{p}{b} E_2$ und

$E_4 = \frac{1}{bc} E_2$, also $qE_4 = \frac{q}{bc} E_2$ ist; und es wird

$$A = amE_2 + nE_2 + \frac{p}{b} E_2 + \frac{q}{bc} E_2 \text{ oder}$$
$$= \left(am + n + \frac{p}{b} + \frac{q}{bc}\right) E_2 \text{ sein.}$$

§. 272.

Es soll der Quotient oder das Verhältniß zweier gleichartiger Größen gefunden werden.

Auflösung. Man verfahre wie bei der Auffuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen (§. 81.).

Sind z. B. die beiden Größen A und B gegeben, und ist $A > B$, so ist, wenn man die Quotienten der Reihe nach mit $q, q_1, q_2, \ldots$ und die Reste mit $R, R_1, R_2, \ldots$ bezeichnet

$$A = q \,.\, B + R$$
$$B = q_1 \,.\, R + R_1$$
$$R = q_2 \,.\, R_1 + R_2 \text{ u. s. w.}$$

Dividirt man die erste Gleichung durch B, die zweite durch R, der dritte durch R_1 u. s. w., so erhält man

$$1)\ \frac{A}{B} = q + \frac{R}{B} = q + \frac{1}{\frac{B}{R}}$$

$$2)\ \frac{B}{R} = q_1 + \frac{R_1}{R} = q_1 + \frac{1}{\frac{R}{R_1}}$$

$$3)\ \frac{R}{R_1} = q_2 + \frac{R_2}{R_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{R_1}{R_2}} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt

$$\frac{A}{B} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}$$

Wird einer der Reste gleich Null, dann ergiebt sich für $\frac{A}{B}$ eine bestimmte Zahl z. B. $\frac{a}{b}$; wird aber keiner der Reste gleich Null, dann läßt sich $\frac{A}{B}$ nur annähernd angeben, man kann jedoch den Fehler so klein machen, wie man will.

Im ersten Falle nennt man die Größen commensurabel, im zweiten incommensurabel.

Nimmt man irgend einen Theil von B als Einheit an, etwa den nten, so daß $B = n \,.\, E$ ist, dann hat man:

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}, \text{ oder}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{nE} = \frac{A : E}{n} = \frac{a}{b} \text{ d. h.}$$

Das Verhältniß zweier Größen ist unabhängig von der gewählten Einheit.

Sind zwei Größen A und B so beschaffen, daß das m fache der einen gleich dem n fachen der andern, also daß $mA = nB$ ist, so muß $A : B = n : m$ sein, z. B.

14400 preuß. Fuß = 13913 paris. Fuß, mithin
1 preuß. Fuß : 1 paris. Fuß = 13913 : 14400.

§. 273.

Ist $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ und $\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$ und

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist auch

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, oder $A : B = C : D$.

Man sagt dann, die vier Größen A, B, C und D bilden eine Größenproportion.

§. 274.

Sind A und B irgend zwei ungleichartige Größen und so von einander abhängig, daß mit einer bestimmten Zu- oder Abnahme von A eine gleich vielfache Zu- oder Abnahme von B verbunden ist, daß also, wenn A zu $A_1 = nA$ wird, auch B in $B_1 = nB$ übergeht, so sagt man: die Größen A und B sind einander direkt proportionirt und hat dann die Proportion $A : A_1 = B : B_1$.

Ist dagegen die Abhängigkeit der ungleichartigen Größen A und B der Art, daß mit einer bestimmten Zunahme von A eine gleichvielfache Abnahme von B verbunden ist, daß also, wenn A zu $A_1 = mA$ wird, B in $B_1 = \frac{1}{m} B$ übergeht, so sagt man: die Größen A und B sind einander umgekehrt oder indirekt proportionirt. Dann verhält sich

$A : A_1 = 1 : m$

$B : B_1 = 1 : \frac{1}{m} = m : 1$, oder

$B_1 : B = 1 : m$; man hat dann also die Proportion

$A : A_1 = B_1 : B$.

Ob der erste oder zweite Fall eintritt, findet man allemal

durch die Frage: „Je mehr von A?" und durch die Antwort: „desto mehr oder desto weniger von B." So sind z. B. Waaren und die zugehörigen Preise, Arbeiten und die bei gleicher Zeit dazu nöthigen Arbeiter einander direkt, dagegen die Anzahl der Arbeiter und die zu gleicher Arbeit gehörige Zeit einander indirekt proportionirt.

Sind von den vier Größen A, A_1, B und B_1 drei bekannt, so läßt sich immer die vierte dazu finden; die praktische Regel hierzu ist unter dem Namen Regula de tri bekannt.

Beispiele. 1) Wenn 6 Pfund 5 Thaler kosten, was kosten dann 3 Pfund?

A = 6 Pfd. kosten 5 Rthlr. = B
A_1 = 3 „ „ x „ = B_1

Je mehr Geld, desto mehr Waare; direkte Proportion, also

$A : A_1 = B : B_1$, oder

6 Pfd. : 3 Pfd. = 5 Rthlr. : x Rthlr.

Die Benennungen fortgelassen, giebt

$$6 : 3 = 5 : x$$
$$x = 2\tfrac{1}{2}.$$

Folglich kosten 3 Pfd. $2\frac{1}{2}$ Rthlr.

2) Wenn 6 Arbeiter einen Graben in 5 Stunden ausheben, in wieviel Zeit werden 3 Arbeiter mit demselben Graben fertig?

A = 6 Arbeiter in 5 Stunden = B
A_1 = 3 „ „ x „ = B_1

Je mehr Zeit, desto weniger Arbeiter; indirekte Proportion, also

$A : A_1 = B_1 : B$, oder

6 Arb. : 3 Arb. = x Stund. : 5 Stund.

Die Benennungen fortgelassen, giebt

$$6 : 3 = x : 5$$
$$x = 10.$$

Folglich werden 3 Arbeiter 10 Stunden gebrauchen.

§. 275.

Sind A, B und C ungleichartige Größen, und ist A so von B und C abhängig, daß A und B einander proportionirt sind, wenn C unverändert gedacht wird, und A und C einander proportionirt sind, wenn B unverändert gedacht wird, so muß, wenn A_1 den Werth bezeichnet, den A annimmt, wenn B in B_1 und C in C_1 übergehen, $A : A_1 = B \,.\, C : B_1 \,.\, C_1$ sein.

Beweis. Es bedeute K den Werth, welchen A annimmt, wenn B in B_1 übergeht, während C unverändert bleibt, so wird sich verhalten

1) $A : K = B : B_1$. Dann ist aber auch, der gemachten Voraussetzung zufolge, A_1 der Werth, in welchen K übergeht, wenn C_1 aus C wird, während B_1 unverändert bleibt, und es muß sich verhalten 2) $K : A_1 = C : C_1$. Setzt man nun beide Proportionen 1 und 2 zusammen, so fällt K ganz fort, und man erhält

$$A : A_1 = B . C : B_1 . C_1.$$

Das Verhältniß $A : A_1$ nennt man in diesem Falle aus den Verhältnissen $B : B_1$ und $C : C_1$ **zusammengesetzt**, und drückt sich auch wohl so aus: Verhalten sich zwei Größen A und A_1 in einer Beziehung wie B zu B_1, in einer anderen Beziehung aber wie $C : C_1$, so ist $A : A_1 = B . C : B_1 . C_1$.

So ist z. B. die Länge eines Weges A abhängig von der Zeit B, in welcher derselbe zurückgelegt wird, und von der dazu verwendeten Geschwindigkeit C; so daß, wenn A_1 die Länge des Weges bezeichnet, welcher in der Zeit B_1 und mit der Geschwindigkeit C_1 zurückgelegt wird, $A : A_1 = B . C : B_1 . C_1$ ist.

§. 276.

Der vorige Satz gilt in einer größeren Ausdehnung. Ist nämlich die Größe A so von den Größen B, C, D, E abhängig, daß, wenn C, D, E unverändert bleiben, A und B proportionirt sind, wenn dagegen B, D und E ungeändert bleiben, A und C proportionirt sind u. s. w.; und bezeichnet A_1 den Werth, den A annimmt, wenn B in B_1, C in C_1, D in D_1 und E in E_1 übergehen, so wird $A : A_1 = B . C . D . E : B_1 . C_1 . D_1 . E_1$ sein.

Es beruht auf diesem Satze die sogenannte **zusammengesetzte Regula de tri**.

z. B. Wenn 15 Personen in 9 Tagen für 3 Rthlr. Brod verzehren, wenn der Scheffel Roggen 1 Rthlr. 18 Sgr. 9 Pf. kostet, und die Portion einer Person täglich 45 Nth. beträgt; wieviel Personen werden in 5 Tagen für 2 Rthlr. 10 Sgr. Brod verzehren können, wenn der Scheffel Roggen 1 Rthlr. 3 Sgr. 9 Pf. kostet und die Person täglich 35 Nth. bekommt?

Man bilde zuerst folgenden Ansatz:

15 Pers. 9 Tage 3 Rthlr. Brod $1\frac{5}{8}$ Rthlr. d. Schfl. 0,9 Pfd. die Portion
x „ 5 „ $2\frac{1}{3}$ „ „ $1\frac{1}{8}$ „ „ „ 0,7 „ „ „

und bedenke, daß, alle übrigen Bestimmungen als gleich und nur eine als verschieden gedacht, die Anzahl der Personen den Zeiten indirekt, der Masse des Brodes, als auch dessen Preisen direkt, den Preisen der Scheffel indirekt, dem Gewicht der Portionen indirekt proportionirt ist, also verhält sich:

$$15 : x = 5 : 9 = 5 : 9$$
$$= 3 : 2\tfrac{1}{3} = 9 : 7$$
$$= 1\tfrac{1}{9} : 1\tfrac{4}{9} = 9 : 13$$
$$= 0{,}7 : 0{,}9 = 7 : 9, \text{ mithin}$$
$$15 : x = 5 . 9 . 9 . 7 : 9 . 7 . 13 . 9, \text{ oder}$$
$$3 : x = 1 : 13, \text{ folglich}$$
$$x = 39.$$

§. 277.

Die sogenannte Ketten-Regel löst die Aufgabe, das Verhältniß zweier verschiedenen Münzsorten, Maaße oder Gewichte zu finden, wenn ihr Verhältniß zu anderen Münzsorten, Maaßen oder Gewichten bekannt ist.

Beispiel. Wieviel Laubthlr. sind gleich 165 Frd'or, wenn 4 Laubthlr. gleich 11 Rheinl. Gulden, 4 Preuß. Rthlr. gleich 7 Rheinl. Gulden, 2 Preuß. Rthlr. gleich 3 Oestr. Gulden, und 2 Frd'or gleich 17 Oestr. Gulden sind?

Bezeichnet man die gesuchte Anzahl der Laubthlr. mit x, so ist

x Laubthlr. = 165 Frd'or,
2 Frd'or = 17 Oestr. Gulden,
3 Oestr. Guld. = 2 Pr. Rthlr.
4 Pr. Rthlr. = 7 Rheinl. Gulden und
11 Rheinl. Guld. = 4 Laubthlr.;

mithin finden nach §. 272. folgende Proportionen statt:

1 Laubthlr. : 1 Frd'or = 165 : x
1 Frd'or : 1 Oestr. Gulden = 17 : 2
1 Oestr. Gld. : 1 Pr. Rthlr. = 2 : 3
1 Pr. Rthlr. : 1 Rh. Gld. = 7 : 4
1 Rh. Gld. : 1 Laubthlr. = 4 : 11.

Setzt man diese Proportionen zusammen, so erhält man

$$1 : 1 = 165 . 17 . 2 . 7 . 4 : x . 2 . 3 . 4 . 11,$$

mithin ist $x = \frac{165 . 17 . 2 . 7 . 4}{2 . 3 . 4 . 11} = 595.$

Es ist leicht, hieraus die praktische Regel zu abstrahiren.

§. 278.

Die Theilungs- oder Gesellschafts-Rechnung löst die Aufgabe, eine gegebene Größe in mehrere Theile zu theilen, die ein bestimmtes laufendes Verhältniß zu einander haben. Für unbenannte Zahlen ist diese Aufgabe schon in §. 245. gelöst; die dort angegebene Auflösung gilt auch hier.

Beispiel. Fünf Personen A, B, C, D und E sollen sich dergestalt in 360 Rthlr. theilen, daß sich verhält der Antheil des A zu dem

des B wie $6:7\frac{1}{2}$, der von B zu dem des C wie $2:3\frac{1}{5}$, der von A zu dem des D wie $2:4\frac{1}{4}$ und der von B zu dem des E wie $3\frac{1}{3}:3$. Wieviel erhält ein Jeder?

Bezeichnet man die Antheile des A, B, C, D und E der Reihe nach mit x, y, z, v, s, so verhält sich den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$$x:y = 6:7\tfrac{1}{2} = 12:15 = 4:5$$
$$y:z = 2:3\tfrac{1}{5} = 10:16 = 5:8$$
$$x:v = 2:4\tfrac{1}{4} = 8:17 = 8:17$$
$$y:s = 3\tfrac{1}{3}:3 = 10:9 = 10:9.$$

Bildet man aus diesen 4 Proportionen nach Anleitung des §. 246. eine laufende Proportion, so erhält man:

$$x:y:z:v:s = 8:10:16:17:9,$$

und wenn man endlich die im §. 245. gegebene Regel anwendet, ergiebt sich

x also der Antheil des A = 48 Rthlr.
y „ „ „ „ B = 60 „
z „ „ „ „ C = 96 „
v „ „ „ „ D = 102 „ und
s „ „ „ „ E = 54 „ .

§. 279.

Es kann bei der Gesellschafts-Rechnung der Fall vorkommen, daß das Verhältniß der Theile erst aus mehreren anderen gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt werden muß, was im Wesentlichen das angegebene Verfahren nicht ändert.

Beispiel. Drei Städte A, B, C sollen eine Contribution von 1282 Rthlr. zusammenbringen.

A hat 7200 Einwohner und 2400 Rthlr. Kriegsschulden
B „ 6000 „ „ 1100 „ „
C „ 4800 „ „ 1500 „ „

Wenn nun die Beiträge nach Verhältniß der Einwohnerzahlen und der eingebüßten Geldsummen vertheilt werden sollen, wieviel hat jede Stadt zu zahlen?

Gesetzt x, y und z wären die Beiträge der 3 Städte A, B und C, so ergiebt sich, wenn man erwägt, daß diese Beiträge den Einwohnerzahlen direkt, den Verlusten aber indirekt proportionirt sind:

$$x:y = \begin{Bmatrix} 7200:6000 = 6:5 \\ 1100:2400 = 11:24 \end{Bmatrix} = 11:20$$

$$x:z = \begin{Bmatrix} 7200:4800 = 3:2 \\ 1500:2400 = 5:8 \end{Bmatrix} = 15:16,$$

mithin ist $x:y:z = 165:300:176$; daher ist

x oder der Beitrag von A = 330 Rthlr.
y „ „ „ „ B = 600 „
z „ „ „ „ C = 352 „ .

§. 280.

Die sogenannte Procent-Rechnung ist nur ein specieller Fall der Regula de tri. Einige der am häufigsten vorkommenden Fälle sollen hier angegeben werden.

1) Man sagt, ein Kapital bringe p Procent ($\frac{0}{0}$ oder pc.) Zinsen (Interessen), wenn 100 Geldeinheiten dieses Kapitals einen jährlichen Gewinn von p gleichnamigen Einheiten bewirken. Besteht das Kapital aus a Rthlr., und nennt man x die jährlichen Zinsen desselben, so wird $100 : p = a : x$, also $x = \frac{ap}{100}$ sein. In n Jahren betragen die Zinsen also $\frac{nap}{100}$, so daß nach n Jahren das Kapital mit den Zinsen $a + \frac{nap}{100} = a \cdot \left(\frac{100 + np}{100}\right)$ sein wird. Man nennt dies den künftigen Werth des Kapitals, a dagegen den heutigen Werth desselben.

2) Ein Kapital, welches erst nach einiger Zeit bezahlt zu werden braucht, sogleich und zwar mit p Procent Disconto zahlen, heißt das Kapital mit einem Abzug von p Procent jährlichen Zinsen auszahlen. Ist z. B. a das nach n Jahren zu zahlende Kapital, so werden statt 100+np Rthlr. 100, also statt a Rthlr. $\frac{100a}{100 + np}$ Rthlr. zu zahlen sein. Es ist dies der heutige Werth, während a der zukünftige Werth war.

3) Es heißt, man erhalte p Procent Rabatt, wenn man entweder für Waaren, die 100 Rthlr. kosten, 100 — p Rthlr., oder für Waaren, die 100 + p Rthlr. kosten, 100 Rthlr. bezahlt. Der erstere ist der gewöhnliche und heißt Rabatt von Hundert, der letztere wird Rabatt auf's Hundert genannt. Hat man z. B. für a Rthlr. Waare mit p Procent Rabatt von Hundert gekauft, so zahlt man statt 100 Rthlr. nur 100 — p Rthlr., also statt a Rthlr. nur $\frac{100 - p}{100} \cdot a$ Rthlr. Sollte dagegen der Rabatt auf's Hundert berechnet werden, so zahlt man statt 100+p Rthlr. nur 100 Rthlr., also statt a Rthlr. nur $\frac{100}{100 + p} \cdot a$ Rthlr.

Durch einfache Subtraktion beider Resultate findet man leicht, welcher Rabatt für den Käufer der bessere ist.

4) Man sagt, Gold stehe p Procent, wenn man statt 100 Rthlr. Gold (20 Louisd'or) 100 + p Rthlr. Courant erhält.

Dieser Mehrbetrag in Courant bei einem Goldstück wird Agio genannt und beträgt also für 1 Louisd'or $\frac{p}{20}$ Rthlr. oder $\frac{3}{2} \cdot p$ Sgr.; a Rthlr. Gold sind daher $= \frac{100+p}{100} \cdot a$ Rthlr. Courant.

5) Ein Staatspapier oder eine Actie steht zu p Procent, wenn 100 Einheiten dieses Papiers p Einheiten baaren Geldes gleich zu achten sind; a Rthlr. in solchem Papier sind also gleich $\frac{a \cdot p}{100}$ Rthlr. in Courant.

6) Das Gewicht einer Waare mit der Emballage heißt Brutto, das Gewicht der Emballage heißt Tara und das Gewicht der Waare selbst Netto. p Procent Tara heißt daher, auf 100 Pfd. der emballirten Waare rechnet man p Pfd. Tara. Wiegt daher eine Waare a Pfd. Brutto, so beträgt das Tara-Gewicht $\frac{ap}{100}$ Pfd.; das Netto-Gewicht ist daher $a - \frac{ap}{100} = a\left(\frac{100-p}{100}\right)$ Pfd.

7) Man sagt, eine Mischung enthalte p Procent einer gewissen Substanz, sobald in 100 Theilen der Mischung p Theile dieser Substanz enthalten sind. Enthielte z. B. die Mischung A 3 Substanzen in dem Verhältniß von m:n:q, so würde nach §. 245. für 100 Theile dieser Mischung der erste Theil $\frac{100m}{m+n+q}$

" zweite " $\frac{100n}{m+n+q}$

" dritte " $\frac{100q}{m+n+q}$ sein.

Die Mischung A enthält daher $\frac{100m}{m+n+q}$ Procent der ersten,

$\frac{100n}{m+n+q}$ " " zweiten,

und $\frac{100q}{m+n+q}$ " " dritten

Substanz.

§. 281.

In den vorstehenden Paragraphen wurde gezeigt, wie die Theorie der Proportionen benutzt werden kann, um aus gegebenen Größen andere noch unbekannte Größen abzuleiten, welche mit den ersteren in bestimmten gegebenen Beziehungen stehen. Häufig ist aber der Zusammenhang zwischen den gegebenen und gesuchten Größen so verwickelt, daß die Anwendung der Proportionen

nicht mehr zum Ziele führt, alsdann verfährt man in folgender Weise:

Man bezeichnet nämlich die Maaße der gesuchten Größen mit x, y, z u. s. w., behandelt sie nun ganz wie bekannte und drückt, die Operationszeichen zu Hülfe nehmend, die in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen an den Maaßen aus, wobei man alle gleichartigen Größen immer auf dieselbe Einheit bezieht. Man gelangt dann zu Ausdrücken, die, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, einander gleich sein müssen, und welche, durch das Gleichheitszeichen verbunden, Gleichungen mit unbenannten Zahlen liefern, deren Auflösung das verlangte Resultat ergiebt. Obgleich die Gleichungen nur mit unbenannten Zahlen angesetzt werden dürfen, so hat man doch bei ihrer Bildung die Benennung nicht aus den Augen zu verlieren und hat besonders zu bedenken, daß sämmtliche Glieder derselben benannt sein müssen, und daß allemal eben so viel Gleichungen angesetzt werden müssen, als Unbekannte in dieselben eingeführt sind.

Am deutlichsten läßt sich das anzuwendende Verfahren an einigen Beispielen zeigen:

1) Jemand will eine Geldsumme unter eine Anzahl Personen vertheilen. Um jeder Person a Rthlr. zu geben, hat er c Rthlr. zu wenig; giebt er aber jeder Person nur b Rthlr., so behält er d Rthlr. übrig. Wie groß war die Geldsumme und welches die Anzahl der Personen?

Auflösung. Man kann entweder die Anzahl der Personen oder die Zahl der Rthlr. in der zu vertheilenden Geldsumme als Unbekannte einführen.

Gesetzt, es wären x Personen.

Giebt er jeder Person a Rthlr., so giebt er im Ganzen ax Rthlr. aus, dies ist aber schon um c Rthlr. mehr als die Geldsumme, also beträgt diese ax—c Rthlr.

Wenn er jeder Person b Rthlr. giebt, so giebt er im Ganzen bx Rthlr. aus, und da ihm noch d Rthlr. übrig bleiben, so beträgt die Geldsumme bx + d Rthlr.

Für dieselbe Geldsumme hat man nun zwei Ausdrücke, welche natürlich einander gleich sein müssen; es ist mithin:

$$ax - c = bx + d,$$

$$\text{also } x = \frac{c + d}{a - b}.$$

Will man die Größe der Geldsumme haben, so braucht dieser Werth von x nur in einen der beiden Ausdrücke: ax—c oder bx+d gesetzt zu werden, dies giebt in ax — c gesetzt:

$$\frac{ac + ad}{a - b} - c = \frac{ad + bc}{a - b} \text{ Rthlr.}$$

Führt man dagegen die Zahl der Rthlr. in der Geldsumme $= y$ als unbekannt ein, so kann man die Anzahl der Personen doppelt ausdrücken, nämlich:

$$\frac{y + c}{a} = \frac{y - d}{b}, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{bc + ad}{a - b} \text{ folgt.}$$

In diesem Beispiele war es gleichgültig, was als unbekannt eingeführt wurde, da beide Annahmen auf eine einfache Art das richtige Resultat lieferten; in manchen Fällen hängt dagegen von einer passenden Wahl der Unbekannten die Leichtigkeit der Auflösung ab.

2) Es soll Jemand eine Summe von a Rthlr. nach m Jahren, eine andere Summe von b Rthlr. nach n Jahren und eine dritte von c Rthlr. nach p Jahren bezahlen. Er will statt dessen die ganze Summe von $a + b + c$ Rthlr. auf einmal abtragen. Nach welcher Zeit muß dies geschehen, wenn keiner von den beiden Betheiligten einen Zinsverlust erleiden soll?

Auflösung. Gesetzt nach x Jahren, so ist x so zu bestimmen, daß die Zinsen von $a + b + c$ Rthlr. nach x Jahren gleich der Summe der Zinsen sind, welche die a, b, c Rthlr. resp. in m, n, p Jahren tragen. Diese Aufgabe ist bestimmt, obgleich nicht angegeben ist, zu wieviel Procent die Zinsen in Anschlag gebracht werden sollen. Bezeichnet man diese Procente mit r, so sieht man, daß

a Rthlr.	in m Jahren	$\frac{amr}{100}$ Rthlr. Zinsen,	
b „	„ n „	$\frac{bnr}{100}$ „ „	
c „	„ p „	$\frac{cpr}{100}$ „ „	
$(a+b+c)$ „	„ x „	$\frac{(a+b+c)\,xr}{100}$ „	tragen.

Es ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$\frac{(a + b + c)\,xr}{100} = \frac{amr}{100} + \frac{bnr}{100} + \frac{cpr}{100} \text{ oder}$$

$$(a + b + c)\,x = am + bn + cp, \text{ folglich ist}$$

$$x = \frac{am + bn + cp}{a + b + c}.$$

§. 282.

Die zweite Aufgabe des §. 281. läßt sich allgemeiner stellen, und es ist leicht aus der obigen Auflösung zu sehen, daß, wenn Geldsummen von $A, A_1, A_2, A_3 \ldots$ Rthlr. resp. nach $n, n_1, n_2, n_3 \ldots$ Jahren abzutragen wären, man statt dessen die ganze Summe

von $A + A_1 + A_2 + A_3 \ldots\ldots$ Rthlr. nach einer Zeit bezahlen könnte, die durch folgenden Ausdruck bestimmt ist:

$$\frac{An + A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3 + \ldots\ldots}{A + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots}.$$

Man pflegt diese Zeit den mittleren Zahlungstermin zu nennen.

§. 283.

Bei manchen Aufgaben hat es den Anschein, als fehle ein Bestimmungsstück, z. B. in der zweiten Aufgabe des §. 281. die Procente. Bezeichnet man dasselbe aber mit einem Buchstaben, dort mit r, und führt es, als bekannt betrachtet, mit in die Rechnung ein, so muß es, wenn die Aufgabe wirklich davon unabhängig ist, nachher wieder heraus fallen, und man hat sich nur mit Hülfe desselben das Ansetzen der Gleichungen erleichtert.

Beispiel. Eine Person A vollendet eine ihr aufgetragene Arbeit in a Stunden, eine zweite B braucht zur Beendigung derselben Arbeit b Stunden. In wieviel Stunden wird diese Arbeit beendet sein können, wenn A und B vereint daran arbeiten?

Auflösung. Die Aufgabe scheint unbestimmt zu sein, da die Arbeit selbst gar nicht angeführt ist, man bezeichne sie daher mit irgend einem Buchstaben, z. B. mit P, und denke sich dies P auf eine beliebige Einheit bezogen.

Gesetzt A und B vollenden gemeinschaftlich P in x Stunden.

Da A allein in a Stunden P macht, so macht er in

1 Stunde $\frac{P}{a}$, also in

x Stunden $\frac{P}{a} \cdot x$

Da B allein in b Stunden P macht, so macht er in

1 Stunde $\frac{P}{b}$, also in

x Stunden $\frac{P}{b} \cdot x$.

Das, was aber A und B in x Stunden beendigen, nämlich $\frac{P}{a} \cdot x + \frac{P}{b} \cdot x$ muß gleich der Arbeit P sein; die Gleichung zur Bestimmung von x heißt daher:

$\frac{P}{a} \cdot x + \frac{P}{b} \cdot x = P$, oder beide Seiten durch P dividirt,

$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$; woraus sich

$x = \frac{ab}{a+b}$ ergiebt.

Anmerkung. Wenn noch eine dritte Person C dieselbe Arbeit in c Stunden beendigen würde, so würden zur Vollendung der Arbeit, wenn A, B und C vereint daran arbeiten, $\frac{abc}{ab + ac + bc}$ Stunden gehören.

§. 284.

Der Vortheil, welchen die Einführung von Buchstaben als allgemeine Zahlzeichen gewährt, tritt bei dieser Art von Aufgaben sehr deutlich hervor. Ist nämlich irgend eine Aufgabe für bestimmte Zahlen aufgelöst, so ist auch das Resultat nur für diesen speciellen Fall gefunden, und man kann aus demselben nicht erkennen, wie es aus den gegebenen Zahlen zusammengesetzt ist. Werden diese dagegen mit Buchstaben bezeichnet, und wird dann die Aufgabe gelöst, so ist das Resultat für alle Aufgaben dieser Art, welchen besonderen Werth die Buchstaben auch annehmen mögen, gefunden, wenn man nur für jeden einzelnen Fall an die Stelle der Buchstaben die gegebenen Zahlen setzt. Ergiebt sich durch eine solche Substitution ein positiver Werth für die gesuchte Zahl, so ist dieser immer eine direkte Auflösung der Aufgabe; ein negativer Werth bedarf aber immer noch einer besonderen Erörterung.

Beispiel. 1) A ist jetzt m Jahre, B dagegen n Jahre alt. Wann wird A, k mal so alt sein, als B?

Auflösung. Gesetzt, A wäre nach x Jahren k mal so alt als B, so ist A nach x Jahren $m + x$, B dagegen nach x Jahren $n + x$ Jahre alt, folglich die Gleichung zur Bestimmung von x:

$$m + x = k(n + x), \text{ woraus folgt, daß}$$

$$x = \frac{m - nk}{k - 1} \text{ sein muß.}$$

x erhält einen positiven Werth, wenn Zähler und Nenner dieses Bruches zugleich positiv oder zugleich negativ sind, d. h. wenn m und k zugleich größer oder zugleich kleiner sind, als resp. nk und 1. In jedem andern Falle erhält x einen negativen Werth, und dann erhält man keine direkte Lösung der Aufgabe, weil dieselbe in der That keiner solchen fähig ist; denn wäre z. B. $m = 56$, $n = 32$ und $k = 2$, wodurch $x = -8$ wird, so ist leicht zu sehen, daß der Zeitpunkt, in welchem A, der jetzt 56 Jahre alt ist, doppelt so alt, als B, der jetzt 32 Jahre alt ist, sein soll, bereits seit 8 Jahren verflossen ist. Dessen ungeachtet ist das negative Resultat einer Auslegung fähig. Verwandelt man nämlich in der obigen Gleichung die Vorzeichen von x in die entgegengesetzten, so geht sie über in

$$m - x = k(n - x), \text{ woraus sich}$$

$$x = \frac{nk - m}{k - 1} \text{ ergiebt.}$$

Untersucht man, welcher Aufgabe die letztere Gleichung entspricht, so findet sich leicht, daß sie sich aus der ersteren ableiten läßt, wenn man die Frage so stellt: „Vor wie viel Jahren war A, k mal so alt als B?"

Man sieht also, daß, wenn sich für den Unbekannten ein negativer Werth ergiebt, eine Aenderung in der Aufgabe vorzunehmen ist.

Wäre $m = nk$, so ist $x = \frac{0}{k - 1} = 0$; und in der That ist dann gerade jetzt der Zeitpunkt eingetreten, in welchem A, k mal so alt als B ist.

Ist m nicht gleich n, aber $k = 1$, so wird $x = \frac{m - n}{0} = \infty$ sein; dies zeigt an, daß A, der jetzt nicht ebenso alt, wie B ist, niemals ebenso alt wie B werden kann.

Ist aber gleichzeitig $m = n$ und $k = 1$, so ist $x = \frac{0}{0}$, d. h. gleich jeder beliebigen Zahl, und in der That muß in diesem Falle der Werth von x ganz beliebig sein; weil, wenn A jetzt gerade so alt wie B ist, er es auch zu jeder andern Zeit sein wird.

2) Von einer Materie A habe eine Einheit den Werth a, von einer andern B dagegen habe eine Einheit den Werth b, man will aus beiden Materien A und B eine dritte C mischen, so daß eine Einheit derselben den Werth c erhalte. Wenn nun im Ganzen p Einheiten der Mischung dargestellt werden sollen, wie viel Einheiten müssen von A und B dazu genommen werden?

Auflösung. Gesetzt man müsse x Einheiten von A und
y Einheiten von B dazu nehmen,
so muß 1) $x + y = p$ sein.

Da ferner eine Einheit von A den Werth a hat, so haben
x Einheiten " A " " ax, und
da eine Einheit " B " " b hat, so haben
y Einheiten " B " " by;

es haben also $x + y$ Einheiten der Mischung C den Werth $ax + by$, mithin hat eine Einheit von C den Werth $\frac{ax + by}{x + y}$, so daß die zweite Gleichung heißt:

$$2) \quad \frac{ax + by}{x + y} = c; \text{ oder}$$

$$ax + by = cx + cy.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von y aus Nr. 1. nämlich $y = p - x$, so erhält man

$$ax + b(p - x) = cx + c(p - x), \text{ oder}$$
$$ax + bp - bx = cx + cp - cx, \text{ oder}$$
$$x(a - b) = p(c - b), \text{ mithin ist}$$

$$x = \frac{p(c - b)}{a - b}, \text{ also } y = \frac{p(a - c)}{a - b}.$$

Man erkennt leicht, daß der Werth von c allemal zwischen a und b liegen muß, wenn eine Lösung der Aufgabe möglich sein soll.

Anmerkung. Diese Aufgabe kommt häufig bei Legirungen von Gold und Silber zur Anwendung. Man merke daher besonders, daß 1 Mark Gold zu 24 Karat, und 1 Mark Silber zu 16 Loth gerechnet wird; ferner, daß 18karatiges Gold solches ist, in welchem 1 Mark 18 Karat feines Gold und 6 Karat Zusatz enthält, während 1 Mark 12löthiges Silber aus 12 Loth reinem Silber und 4 Loth Zusatz, gewöhnlich Kupfer, besteht.

§. 285.

Die Bestimmungs-Gleichungen finden in der Zahlenlehre eine wichtige Anwendung, indem es häufig verlangt wird, unbenannte Zahlen aufzufinden, welche bestimmte Eigenschaften besitzen oder mit anderen gegebenen Zahlen in einer bestimmten Beziehung stehen.

Beispiel. Es giebt eine sechsziffrige Zahl, von der Eigenschaft, daß wenn man die erste Ziffer rechter Hand, welche eine 2 ist, links an die letzte Stelle setzt, eine Zahl entsteht, welche nur ein Drittel der ersten Zahl beträgt. Wie heißt diese Zahl?

Auflösung. Gesetzt diese Zahl hieße x, so wird dadurch, daß man die rechts am Ende stehende Ziffer 2 wegläßt, 2 von der Zahl subtrahirt und der Rest durch 10 dividirt; man erhält also zunächst $\frac{x-2}{10}$. Setzt man aber die 2 an die letzte Stelle zur Linken, so wird, da die Zahl 6 Ziffern besitzt, 200000 zu dem vorhin erhaltenen Werth $\frac{x-2}{10}$ addirt, wodurch man $200000 + \frac{x-2}{10}$ erhält. Weil nun aber hierdurch, der Aufgabe gemäß, eine Zahl entsteht, die nur ein Drittel der ersten Zahl beträgt, so ist:

$$200000 + \frac{x-2}{10} = \frac{x}{3}, \text{ oder}$$

$$6000000 + 3x - 6 = 10x$$

$$5999994 = 7x, \text{ also ist}$$

$$x = 857142.$$

§. 286.

Wenn Jemand einem Anderen ein Kapital von a Rthlr. auf n Zeiteinheiten zu c Procent überläßt, so sind zwei Arten denkbar, wie der Gläubiger das Kapital benutzen kann:

Entweder läßt er sich nach jeder Zeiteinheit die fälligen Zinsen auszahlen, oder er überläßt dieselben dem Schuldner als ein

neues Kapital, welches dieser wieder mit verzinsen muß, und läßt sich erst nach Ablauf der n Zeiteinheiten das Kapital mit den bis dahin aufgelaufenen Zinsen zurückerstatten.

Im ersteren Falle nennt man die Zinsen *einfache Zinsen*, und die dabei vorkommenden Rechnungen sind schon früher angegeben worden; im zweiten Falle sagt man, die *Zinsen werden zum Kapital geschlagen* und nennt dieselben *zusammengesetzte Zinsen* oder *Zinses-Zinsen*.

Wenn es nun bei Verleihung von Kapitalien einem Gläubiger frei steht, von seinem Schuldner einfache oder zusammengesetzte Zinsen zu verlangen, so giebt es doch eine große Anzahl von Aufgaben, zu deren Lösung man sich nothwendig der Zinseszins-Rechnung bedienen muß. Weiß man z. B., daß sich der Bestand eines Waldes jährlich um c Procent vermehrt, so heißt dies, der Zuwachs auf 100 Kubikmeter beträgt nach Verlauf eines Jahres c Kubikmeter. Diese c Kubikmeter werden aber innerhalb des zweiten Jahres wieder zur Vermehrung, d. h. zum neuen Zuwachs beitragen u. s. f. Dasselbe Verhältniß findet bei der Vermehrung der Volksmenge eines Landes und noch in mehreren ähnlichen Fällen statt.

Die wichtigsten der hierher gehörenden Aufgaben sollen in den folgenden Paragraphen erörtert werden.

§. 287.

Ein Kapital von a Rthlr. ist zu c Procent auf Zinseszinsen ausgeliehen worden, wie groß ist der künftige Werth nach n Jahren?

Es werden aus 100 Rthlr. nach 1 Jahre $100 + c$ Rthlr.,

mithin wird aus 1 „ „ 1 „ $\frac{100 + c}{100}$ „

also wird aus a „ „ 1 „ $a \cdot \frac{100 + c}{100}$ „

Der Bruch $\frac{100 + c}{100}$ wird gewöhnlich mit p bezeichnet und der *Zinsfaktor* genannt, er bedeutet also den künftigen Werth eines Thalers nach Verlauf eines Jahres an.

Es werden also aus a Rthlr. nach einem Jahre ap Rthlr. Diese ap Rthlr. stehen aber ein neues Jahr auf Zinsen und werden daher nach Ablauf desselben zu $ap \cdot p$ oder ap^2 Rthlr. angewachsen sein, so daß aus dem ursprünglichen Kapital von a Rthlr. nach 2 Jahren ap^2 Rthlr. geworden sind.

Auf dieselbe Art ergiebt sich, daß das ursprüngliche Kapital von a Rthlr.

in 3 Jahren zu ap^3 Rthlr.
" 4 " " ap^4 "
" 5 " " ap^5 " , also
" n " " ap^n ". anwachsen wird.

Bezeichnet man den künftigen Werth nach n Jahren mit A, so ist

1) $A = ap^n$.

Aus dieser Gleichung läßt sich, wenn irgend drei der Ausdrücke A, a, p und n gegeben sind, der vierte berechnen.

Beispiele. 1) Ein Kapital von 10000 Rthlr. ist zu 5 Procent auf Zinseszinsen ausgeliehen worden; wie groß ist der künftige Werth nach 10 Jahren?

Hier ist $a = 10000$, $p = \frac{100+5}{100} = 1{,}05$, $n = 10$ und $A = x$, mithin

$$x = 10000 \, . \, (1{,}05)^{10}$$
$$\log x = \log 10000 + 10 \, . \log 1{,}05$$
$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$
$$10 \log 1{,}05 = 0{,}2118930$$
$$\log 10000 = 4{,}0000000$$
$$\log x = 4{,}2118930$$
$$x = 16288{,}95 \text{ Rthlr.}$$

2) Wie groß muß dasjenige Kapital sein, welches durch Zinseszinsen zu 4 Procent in 20 Jahren zu 15000 Rthlr. anwachsen soll?

Hier ist $A = 15000$, $p = 1{,}04$, $n = 20$ und $a = x$, mithin

$$15000 = x \, . \, (1{,}04)^{20}$$
$$x = \frac{15000}{(1{,}04)^{20}}$$
$$\log x = \log 15000 - 20 \, . \log 1{,}04.$$
$$\log 15000 = 4{,}1760913$$
$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$20 \, . \log 1{,}04 = 0{,}3406660$$
$$\log x = 3{,}8354253$$
$$x = 6845{,}817 \text{ Rthlr.}$$

3) Der gegenwärtige Bestand eines Waldes beträgt 20000 Klafter. Wenn sich derselbe nun jährlich um $2\frac{1}{2}$ Procent seines jedesmaligen Holzbestandes vermehrt, nach wieviel Jahren wird, wenn der Wald geschont wird, der Bestand 50000 Klafter betragen?

Hier ist $A = 50000$, $a = 20000$, $p = 1{,}025$ und $n = x$.

$$50000 = 20000 \, . \, (1{,}025)^x$$
$$\log 50000 = \log 20000 + x \, . \log 1{,}025$$

$$x = \frac{\log 50000 - \log 20000}{\log 1{,}025}$$

$$\log 50000 = 4{,}6989700$$
$$\log 20000 = 4{,}3010300$$
$$\text{Differenz} = 0{,}3979400$$
$$\log 1{,}025 = 0{,}0107239$$
$$x = \frac{0{,}3979400}{0{,}0107239}$$
$$\log x = \log 0{,}3979400 - \log 0{,}0107239$$
$$\log 0{,}3979400 = 0{,}5998176 - 1$$
$$\log 0{,}0107239 = 0{,}0303528 - 2$$
$$\log x = 1{,}5694648$$
$$x = 37{,}10777$$

also ungefähr nach 37 Jahren.

4) Man weiß, daß der gegenwärtige Bestand eines Waldes 15342 Klafter beträgt, und daß derselbe vor 5 Jahren, während welcher Zeit er geschont wurde, nur 12326 Klafter enthielt. Um wieviel Procent hat sich derselbe vermehrt?

Berechnet man zunächst den Zinsfaktor, so ist $p = x$, $A = 15342$, $a = 12326$ und $n = 5$, folglich:

$$15342 = 12326 \,.\, p^5$$
$$\log 15342 = \log 12326 + 5 \,.\, \log p$$
$$\log p = \frac{\log 15342 - \log 12326}{5}$$
$$\log 15342 = 4{,}1858820$$
$$\log 12326 = 4{,}0908222$$
$$\text{Differenz} = 0{,}0950598$$
$$\log p = 0{,}0190120$$
$$p = 1{,}044749$$

Da nun $p = \frac{100 + c}{100}$, so ist $\frac{100 + c}{100} = 1{,}044749$

$$100 + c = 104{,}4749$$
$$c = 4{,}4749 \text{ Procent.}$$

§. 288.

1) Sollen in der Aufgabe des §. 287. die Zinsen nicht nach Verlauf eines Jahres, sondern nach Verlauf von $\frac{1}{m}$ Jahren zum Kapital geschlagen werden, so werden aus 100 Rthlr.

nach 1 Jahre $100 + c$ Rthlr.

folglich nach $\frac{1}{m}$ „ $100 + \frac{c}{m}$ „

also aus 1 Rthlr. nach $\frac{1}{m}$ = $\frac{100 + \frac{c}{m}}{100}$ Rthlr.

Der Zinsfaktor p ist daher gleich $\frac{100 + \frac{c}{m}}{100}$, die Anzahl der Zeiteinheiten ist aber m mal so groß wie in der Aufgabe des §. 287., so daß m n statt n in die Formel Nr. 1. desselben gesetzt werden muß. Es ist daher:

$$2)\ A = a \cdot \left(\frac{100 + \frac{c}{m}}{100}\right)^{mn}$$

2) Soll ein auf Zinseszinsen zu c Procent ausgeliehenes Kapital in n Jahren m mal größer werden, so ist $A = ma$, mithin

$$ma = ap^n \text{ und daher}$$

$$3)\ m = p^n,$$

woraus sich n und p, also auch c bestimmen lassen, wenn einer dieser Ausdrücke gegeben ist.

Beispiele. 1) Ein Kapital von 10000 Rthlr. ist zu 5 Procent auf Zinseszinsen ausgeliehen worden; wie groß ist der künftige Werth nach 10 Jahren, wenn die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen werden?

Setzt man in die Formel Nr. 2. $m = 2$, $A = x$, $a = 10000$ und $n = 10$, so ist

$$x = 10000 \cdot \left(\frac{100 + 2{,}5}{100}\right)^{20} \text{ oder}$$

$$x = 10000 \cdot (1{,}025)^{20}, \text{ also}$$

$$\log x = \log 10000 + 20 \log 1{,}025$$

$$\log 1{,}025 = 0{,}0107239$$

$$20 \log 1{,}025 = 0{,}2144780$$

$$\log 10000 = 4{,}0000000$$

$$\log x = 4{,}2144780$$

$$x = 16386{,}19 \text{ Rthlr.}$$

2) Nach wieviel Jahren wird sich ein zu 3¾ Procent ausgeliehenes Kapital verdreifachen, wenn die Zinsen nach Verlauf eines jeden Jahres zum Kapital geschlagen werden?

Setzt man in die Formel Nr. 3. $m = 3$, $p = 1{,}0375$ und $n = x$, so ist

$$3 = (1{,}0375)^x, \text{ also}$$

$$\log 3 = x \cdot \log 1{,}0375, \text{ mithin}$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 1{,}0375} = \frac{0{,}4771213}{0{,}0159881}$$

$$\log x = \log 0{,}4771213 - \log 0{,}0159881$$
$$\log 0{,}4771213 = 0{,}6786289 - 1$$
$$\log 0{,}0159881 = 0{,}2037968 - 2$$
$$\log x = 1{,}4748321$$
$$x = 29{,}84229$$

also ungefähr nach 30 Jahren.

§. 289.

Ein Kapital von a Rthlr. ist zum Zinsfaktor p auf Zinseszinsen ausgeliehen worden und wird jährlich um b Rthlr. vermehrt. Wie groß ist der künftige Werth nach n Jahren?

Ein Kapital von a Rthlr. wird nach §. 287. nach 1 Jahr zu ap Rthlr. und durch Vermehrung von b Rthlr. zu ap + b Rthlr. Nach Verlauf des zweiten Jahres wird diese Summe durch bloße Verzinsung zu $(ap + b)\,p = ap^2 + bp$ und durch Vermehrung von b Rthlr. zu $ap^2 + bp + b$ Rthlr. Setzt man diese Betrachtung fort, so ergiebt sich, daß der künftige Werth nach 3 Jahren $ap^3 + bp^2 + bp + b$ Rhlr. ist, und wenn man den künftigen Werth nach n Jahren mit K bezeichnet, so ist

$$K = ap^n + bp^{n-1} + bp^{n-2} \ldots\ldots + bp^2 + bp + b.$$

Die n letzten Glieder dieser Summe bilden eine geometrische Progression, deren erstes Glied b, und deren Quotient p ist. Durch Anwendung der bekannten Summenformel

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

ergiebt sich

$$4)\ K = ap^n + \frac{bp^n - b}{p - 1}.$$

Wird anstatt jährlich eine Summe von b Rthlrn. zuzulegen, diese immer weggenommen, so hat man nur das Vorzeichen von b zu ändern und erhält

$$5)\ K = ap^n - \frac{bp^n - b}{p - 1}.$$

Die Formeln Nr. 4. und Nr. 5. lassen sich in folgende zusammenfassen

$$K = ap^n \pm \frac{bp^n - b}{p - 1},$$

welcher man durch einfache Umwandlung eine andere Form geben kann, in welcher sie zur schnellen Berechnung geeigneter ist. Nämlich:

$$K = ap^n \pm \frac{bp^n}{p - 1} \mp \frac{b}{p - 1} \text{ oder}$$

$$6)\ K = \left(a \pm \frac{b}{p-1}\right)p^n \mp \frac{b}{p-1}.$$

Die oberen Vorzeichen gelten für die jährliche Zulage, die unteren für die jährliche Wegnahme der b Rthlr.

Beispiele. 1) Jemand hat 5000 Rthlr. zu 5 Procent auf Zinseszinsen gelegt und legt jährlich 100 Rthlr. hinzu. Wie hoch wird das Kapital nach 40 Jahren angewachsen sein?

Hier ist $a = 5000$, $b = 100$, $p = 1{,}05$, $n = 40$ und $K = x$, folglich

$$x = \left(5000 + \frac{100}{0{,}05}\right) . (1{,}05)^{40} - \frac{100}{0{,}05} \text{ oder}$$
$$x = 7000 . (1{,}05)^{40} - 2000.$$

Bezeichnet man $7000 . (1{,}05)^{40}$ mit y, so ist

$$\log y = \log 7000 + 40 . \log 1{,}05$$
$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$
$$40 . \log 1{,}05 = 0{,}8475720$$
$$\log 7000 = 3{,}8450980$$
$$\log y = 4{,}6926700$$
$$y = 49279{,}92, \text{ folglich}$$
$$x = 49279{,}92 - 2000 \text{ oder}$$
$$x = 47279{,}92 \text{ Rthlr.}$$

2) Jemand leiht sein Vermögen von 10000 Rthlr. zu 4 Procent auf Zinseszinsen aus, nimmt aber am Ende jedes Jahres 500 Rthlr. davon ab. Nach wieviel Jahren wird derselbe sein Vermögen verbraucht haben?

Hier ist $a = 10000$, $b = 500$, $p = 1{,}04$, $K = 0$ und $n = x$, folglich:

$$0 = \left(10000 - \frac{500}{0{,}04}\right) . (1{,}04)^x + \frac{500}{0{,}04} \text{ oder}$$
$$0 = (10000 - 12500)(1{,}04)^x + 12500 \text{ oder}$$
$$2500 . (1{,}04)^x = 12500$$
$$(1{,}04)^x = 5$$
$$x \log 1{,}04 = \log 5$$
$$x = \frac{\log 5}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}6989700}{0{,}0170333}$$
$$\log x = \log 0{,}6989700 - \log 0{,}0170333$$
$$\log 0{,}6989700 = 0{,}8444585 - 1$$
$$\log 0{,}0170333 = 0{,}2312988 - 2$$
$$\log x = 1{,}6131597$$
$$x = 41{,}0355$$

also ungefähr nach 41 Jahren.

3) Der gegenwärtige Bestand eines Waldes ist 20000 Klafter, und man weiß, daß der jährliche Zuwachs auf

100 Klafter $2\frac{1}{2}$ Klafter beträgt, und daß 10 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres 600 Klafter geschlagen worden sind. Wie groß war der Bestand vor 10 Jahren?

Auch diese Aufgabe läßt sich nach Formel Nr. 5. lösen, indem man $K = 20000$, $b = 600$, $p = 1{,}025$, $n = 10$ und $a = x$ setzt, dann ist

$$20000 = \left(x - \frac{600}{0{,}025}\right) . (1{,}025)^{10} + \frac{600}{0{,}025} \text{ oder}$$

$$20000 = x . (1{,}025)^{10} - 24000 . (1{,}025)^{10} + 24000 \text{ oder}$$

$$x = \frac{24000\,(1{,}025)^{10} - 4000}{(1{,}025)^{10}} = 24000 - \frac{4000}{(1{,}025)^{10}}.$$

Bezeichnet man $\frac{4000}{(1{,}025)^{10}}$ mit y, so ist

$$\log y = \log 4000 - 10 . \log 1{,}025$$

$$\log 4000 = 3{,}6020600$$

$$10 . \log 1{,}025 = 0{,}1072390$$

$$\log y = 3{,}4948210$$

$$y = 3124{,}791, \text{ mithin}$$

$$x = 20875{,}209 \text{ Klafter.}$$

§. 290.

Wenn eine Person A einer anderen B ein Kapital w zahlt, so daß dasselbe für immer dem B als Eigenthum verbleibt, dieser aber dafür verbunden ist, dem A in bestimmten Terminen eine gewisse Summe r auszuzahlen, so nennt man die Summe r eine Rente, das Kapital w den baaren Werth der Rente, die Person A den Rentenirer oder Rentenempfänger und die Person B den Rentengeber.

Empfängt A die Rente r auf seine Lebenszeit, so nennt man dieselbe eine Leibrente, wird sie aber auf eine bestimmte Anzahl von Jahren ausgezahlt, so heißt sie eine Zeitrente. Von den letzteren kann hier nur die Rede sein, da bei Berechnung der ersteren die Lehren der Wahrscheinlichkeits-Rechnung in Bezug auf die Lebensdauer des A in Anwendung kommen müssen.

§. 291.

Soll der baare Werth w einer n Jahre hindurch zu beziehenden Rente r zum Zinsfaktor p berechnet werden, so muß, der Billigkeit gemäß, angenommen werden, daß der Rentengeber das Kapital w zum Zinsfaktor p während der n Jahre auf Zinseszinsen legt, und daß die dadurch nach §. 287. entstandene Summe wp^n derjenigen Summe gleich sei, welche der Rentenirer erhält,

wenn er die Rente r sogleich nach dem jedesmaligen Empfange ebenfalls zu demselben Zinsfaktor auf Zinseszinsen legt.

Um eine Gleichung zwischen w, n, p und r zu erhalten, hat man in Nr. 5. des §. 289. $K = 0$, $a = w$, $b = r$ zu setzen, wodurch sich ergiebt:

$$wp^n = \frac{r(p^n - 1)}{p - 1}, \text{ also ist:}$$

$$w = \frac{r(p^n - 1)}{(p-1)p^n}. *)$$

Es erhält der Ausdruck für w eine zur Berechnung mit Logarithmen geeignetere Form, wenn man ihn auf folgende Art umwandelt:

$$w = \frac{r}{p-1} \cdot \frac{p^n - 1}{p^n} \text{ oder}$$

$$7)\ w = \frac{r}{p-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{p^n}\right).$$

Für eine immerwährende Rente ist $n = \infty$, mithin $p^n = \infty$, da p stets größer als 1 ist, also $\frac{1}{p^n} = 0$, und daher

$$8)\ w = \frac{r}{p-1}.$$

Beispiele. 1) Wie groß ist der baare Werth einer 10 Jahre hindurch zu beziehenden Rente von 500 Rthlr. zu 5 Procent gerechnet?

Hier ist $r = 500$, $p = 1{,}05$, $n = 10$ und $w = x$, folglich

$$x = \frac{500}{0{,}05}\left(1 - \frac{1}{(1{,}05)^{10}}\right) \text{ oder}$$

$$x = 10000\left(1 - \frac{1}{(1{,}05)^{10}}\right).$$

Bezeichnet man $\frac{1}{(1{,}05)^{10}}$ mit y, so ist

$$\log y = \log 1 - 10 \log 1{,}05$$

$$\log 1 = 0{,}0000000$$

$$10 \log 1{,}05 = 0{,}2118930$$

$$\log y = 0{,}7881070 - 1$$

$$y = 0{,}6139132, \text{ mithin ist}$$

$$x = 10000 \cdot 0{,}3860868 \text{ oder}$$

$$x = 3860{,}868 \text{ Rthlr.}$$

2) Wie groß ist diejenige Rente, deren baarer Werth auf 20 Jahre gleich 25000 Rthlr ist, zu 3½ Procent gerechnet?

*) Hierbei ist angenommen worden, daß der Rentenirer die erste Rente erst nach Verlauf des ersten Jahres erhält; solche Renten nennt man nachschußweise Renten.

Setzt man in die Formel Nr. 7. $w = 25000$, $p = 1{,}035$, $n = 20$ und $r = x$, so ist:

$$25000 = \frac{x}{0{,}035}\left(1 - \frac{1}{(1{,}035)^{20}}\right), \text{ also}$$

$$x = \frac{875}{1 - \frac{1}{(1{,}035)^{20}}}.$$

Bezeichnet man $\frac{1}{(1{,}035)^{20}}$ mit y, so ist

$$\log y = \log 1 - 20 \, . \log 1{,}035$$

$$\log 1 = 0{,}0000000$$

$$20 \log 1{,}035 = 0{,}2988060$$

$$\log y = 0{,}7011940 - 1$$

$$y = 0{,}502567, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{875}{0{,}497433}$$

$$\log x = \log 875 - \log 0{,}497433$$

$$\log 875 = 2{,}9420081$$

$$\log 0{,}497433 = 0{,}6967346 - 1$$

$$\log x = 3{,}2452735$$

$$x = 1759{,}031 \text{ Rthlr.}$$

Uebungen zur Lehre von den benannten Zahlen.*)

a. Reduktion auf eine andere Einheit.

(Zu §. 270. u. 271.)

1. Wieviel Sgr. sind in 58 Rthlr. enthalten?
   Antw. 1740 Sgr.
2. Wieviel Gramm betragen 3 Ctr. $6\frac{1}{8}$ Pfd.?
   Antw. 153062,5 gr.
3. Wieviel Liter (Kannen) betragen 17 Neuscheffel 27 Liter?
   Antw. 877 Liter (Kannen).
4. Wieviel Millimeter (Strich) sind 96 m. 4 cm. 8 mm.?
   Antw. 96048 mm.
5. Wieviel Quadratmeter sind 5 Hektar 7 Ar 0,2 □m.?
   Antw. 50700,2 □m.
6. Wieviel Quadratmeter sind 3 □Meilen 186 Hektar 5 Ar?
   Antw. 170610500 □m.

*) Alle Maaße und Gewichte sind nach dem Gesetz vom 17. August 1868 angenommen worden. Siehe Näheres im Anhange.

7. Wieviel Gramm betragen 2 Ctr. 3 Pfd. 5 Dekagramm (Neuloth)?
Antw. 101550 gr.
8. Wieviel Rthlr. sind in 6120 Pf. enthalten?
Antw. 17 Rthlr.
9. Den wievielten Theil eines Centners betragen 25 Nlth.?
Antw. 0,005.
10. Wieviel Pfund und Neuloth betragen $\frac{17}{40}$ Ctr.?
Antw. 42 Pfd. 25 Nlth.
11. Der wievielte Theil eines Centners sind $\frac{11}{16}$ Nlth.?
Antw. 0,0001375.
12. Wieviel Rthlr. und Sgr. sind in $\frac{128}{5}$ Rthlr. enthalten?
Antw. 25 Rthlr. 18 Sgr.
13. Wieviel machen 3 □dm. 5 □cm. 3 □mm. in □m.?
Antw. 0,030503 □m.
14. Wieviel machen 3 Hektar 5 Ar in □Meilen?
Antw. $\frac{61}{112500}$ □Meilen.
15. Wieviel Kb.mm. sind in 245 Kb.m. enthalten?
Antw. 245 000 000 000 Kb.mm.
16. Wieviel wiegt eine Million Thalerscheine, wenn 100 Thalerscheine 6 Nlth. wiegen?
Antw. 12 Ctr.
17. Wieviel Faß Mehl verbraucht eine Stadt von 14520 Einwohnern jährlich, wenn auf jeden Einwohner wöchentlich 2 Kannen gerechnet werden? *)
Antw. 15100 Faß 80 Kannen.
18. Wenn die Bevölkerungszahl eines Landes 25 Millionen beträgt, der Flächeninhalt desselben 6400 □Meilen, welcher Raum kommt auf jeden Einwohner?
Antw. 144 Ar.

b. Die vier Rechnungsarten mit mehrfach benannten Zahlen.

1. In einem Magazine befinden sich folgende Posten Pulver: 372 Ctr., 84 Ctr. 36 Pfd. 15 Nlth., 87 Ctr. 97 Pfd., 63 Ctr. 17 Nlth., 43 Pfd. 27 Nlth., 69 Ctr. 84 Pfd. Wieviel enthält das Magazin im Ganzen?
Antw. 677 Ctr. 61 Pfd. 9 Nlth.
2. Eine Herrschaft besteht aus folgenden Parcellen: 67 Hektar 39 Ar 47 □m., 75 Hektar 93 Ar 44 □m., 62 Hektar 58 Ar 41 □m., 99 Hektar 25 Ar 38 □m. und 36 Hektar 39 Ar 35 □m. Wie groß ist sie im Ganzen?
Antw. 341 Hektar 56 Ar 5 □m.
3. Von 155633 Rthlr. 27 Sgr. 9 Pf. sind verausgabt: 33640 Rthlr. 18 Sgr. 5 Pf., 2520 Rthlr. 27 Sgr. 11 Pf., 72360 Rthlr. 17 Sgr.

*) Das Jahr zu 52 Wochen gerechnet.

10 Pf.; wieviel ist im Ganzen verausgabt, und wieviel bleibt Bestand?

Antw. Verausgabt: 108522 Rthlr. 4 Sgr. 2 Pf.
Bestand: 47111 „ 23 „ 7 „

4. Eine Wiese enthält 65 Hektar 30 Ar. A pachtet davon 2 Stücke, jedes zu 4 Hektar 35 Ar, B pachtet 2 Stücke, jedes zu 8 Hektar 76 Ar; den Rest pachtet C. Wieviel Pacht muß dieser C zahlen, wenn 1 Ar auf $2\frac{1}{2}$ Sgr. Pacht zu stehen kommt?

Antw. 325 Thlr. 20 Sgr.

5. (10 Rthlr. 15 Sgr. 4 Pf.) . 8 = 84 Rthlr. 2 Sgr. 8 Pf.
6. (11 Rthlr. 6 Sgr. 4 Pf.) . $4\frac{3}{8}$ = 49 Rthlr. 1 Sgr. $5\frac{1}{2}$ Pf.
7. (13 Rthlr. 16 Sgr. 9 Pf.) . 101 = 1369 Rthlr. 11 Sgr. 9 Pf.
8. Eine Cavallerie-Abtheilung hat 60 Pferde, von welchen jedes täglich 10 Liter Hafer und 15 Pfd. Heu erhält. Wie groß ist der Verbrauch im Monat Juni?

Antw. 360 Neuscheffel Hafer und 270 Ctr. Heu.

9. 54 Rthlr. : 9 Rthlr. = 6.
10. (12 Pfd.) : 5 = 2 Pfd. 20 Nlth.
11. Vier Unterofficiere erhalten zusammen 25 Rthlr. Gehalt, wieviel erhält jeder?

Antw. 6 Rthlr. 7 Sgr. 6 Pf.

12. (123 Rthlr. 17 Sgr. 5 Pf.) : (5 Rthlr. 27 Sgr. 6 Pf.) = $20\frac{1889}{2130}$.
13. Es giebt Jemand von seinem monatlichen Gehalte à 6 Rthlr. 7 Sgr. 6 Pf. täglich 6 Sgr. 3 Pf. aus, wie lange reicht er damit?

Antw. 30 Tage.

14. Wie groß ist der 24ste Theil von 16 Ctr. 63 Pfd. 10 Nlth.?

Antw. 69 Pfd. 15 Nlth.

15. (2079 Faß) : 16 = 129 Faß 93 Kannen $1\frac{1}{2}$ Schoppen.
16. Wie oft sind 2 Ctr. 55 Pfd. 3 Gramm in 970 Ctr. 13 Pfd. 16 Nlth. enthalten?

Antw. $380\frac{55520}{127503}$ mal.

17. Von einem Proviantamt werden 94 Ctr. $78\frac{1}{2}$ Pfd. Brot ausgegeben, der Rest beträgt 86 Ctr. $12\frac{3}{4}$ Pfd. Wie groß war der ursprüngliche Vorrath?

Antw. 180 Ctr. $91\frac{1}{4}$ Pfd.

18. Jemand hinterläßt bei seinem Tode eine Frau und 5 Kinder. Das Vermögen beträgt im Ganzen $11046\frac{5}{12}$ Rthlr. Davon gehen für Schulden 1315 Rthlr. 15 Sgr. ab. Vom Rest bekommt die Mutter die eine Hälfte, die Kinder zu gleichen Theilen die andere. Wieviel erhält jedes Kind?

Antw. 873 Thlr. 1 Sgr. 9 Pf.

c. Einfache und zusammengesetzte Regula de tri.

(Zu §. 274—276.)

1. 3 Pfd. kosten 4 Rthlr., was kosten $5\frac{1}{4}$ Pfd.?
Antw. 7 Rthlr. 10 Sgr.
2. Eine Arbeit wird in 20 Stunden von 4 Arbeitern gefertigt, wieviel Arbeiter sind erforderlich, wenn dieselbe Arbeit in 10 Stunden beendet werden soll?
Antw. 8 Arbeiter.
3. $20\frac{1}{4}$ Pfd. Pulver kosten 8 Rthlr. 14 Sgr. 2 Pf., was kostet $1\frac{1}{4}$ Ctr. von derselben Sorte?
Antw. 52 Rthlr. 2 Sgr. 6 Pf.
4. In welcher Zeit werden 27 Arbeiter einen Graben ausheben, zu welchem 15 Arbeiter 18 Tage gebraucht haben?
Antw. 10 Tage.
5. Jemand legt stündlich $1\frac{1}{2}$ Meilen zurück und braucht zu einem gewissen Wege 8 Stunden; in wieviel Zeit wird er denselben Weg zurücklegen, wenn er stündlich $1\frac{3}{4}$ Meilen macht?
Antw. 6 Stunden 51 Minuten $25\frac{5}{7}$ Sekunden.
6. Der Bedarf an Brennmaterial wird für ein Lazareth zu $9\frac{1}{2}$ Haufen 6 Fuß langes Klobenholz veranschlagt; wie groß wird der Bedarf angenommen werden müssen, wenn die Lieferung in 7 Fuß langen Kloben geschieht?
Antw. $8\frac{1}{7}$ Haufen.
7. Wenn 3 Rschffl. 5 Liter Getreide 11 Rthlr. 18 Sgr. 9 Pf. kosten, wieviel Getreide erhält man für 93 Rthlr.?
Antw. 24 Rschffl. 40 Liter.
8. Für 49 Frd'or erhält man $277\frac{2}{3}$ Rthlr. Wieviel gelten 20 Frd'or?
Antw. 113 Rthlr. 10 Sgr.
9. 27 Arbeiter graben 3 Hektar $3\frac{3}{4}$ Ar um, wieviel werden in derselben Zeit 63 Arbeiter umgraben?
Antw. 7 Hektar 8 Ar 75 □m.
10. Wenn man für 30 Rthlr. 25 Sgr. 7 Pf. von einer Waare 2 Ctr. 22 Pfd. 7 Nlth. erhält, wieviel bekommt man für 154 Rthlr. 7 Sgr. 11 Pf.?
Antw. 11 Ctr. 10 Pfd. 35 Nlth.
11. Jemand erhält 300 Hktl. Branntwein für 6450 Rthlr. und 240 Hktl. für 5640 Rthlr. Wieviel beträgt der Unterschied auf 1 Liter bei den beiden Käufen?
Antw. 7,2 Pf.
12. Auf einem Plane findet man die Entfernung zweier 3200 Meter von einander gelegenen Punkte = 64 mm., wieviel Millimeter gehen in diesem Plane auf 110 Ketten?
Antw. 22 mm.
13. Ein Festungswerk wurde von 345 Arbeitern in 60 Tagen erbaut;

wieviel Arbeiter würden nöthig gewesen sein, wenn 15 Tage länger daran gebaut worden wäre?

Antw. 276 Arbeiter.

14. 5000 Mann sind auf 12 Wochen mit Verpflegung versehen. Nach 3 Wochen gehen 1500 Mann davon ab, wie lange werden die Uebrigen mit den noch vorhandenen Lebensmitteln auskommen?

Antw. 12 Wochen 6 Tage.

15. Ein Regiment muß täglich 5 Meilen machen, um in 24 Tagen in seiner Garnison einzutreffen. Wieviel Meilen muß es aber täglich machen, wenn es nach 3 Tagen den Befehl erhält, 5 Tage früher daselbst anzukommen?

Antw. $6\frac{9}{16}$ Meilen.

16. Wenn eine Mauer von 26 Arbeitern in 10 Wochen 5643 m. lang, 3,8 m. hoch und 1,5 m. dick angefertigt wird; wie dick werden dann 20 Arbeiter in 13 Wochen eine Mauer machen können, die 9747 m. lang, 3,3 m. hoch werden soll?

Antw. 0,81 m. dick.

17. Man erhält 4 Pfd. Brod für 3 Sgr., wenn der Schffl. Roggen 2 Rthlr. kostet. Bei welchem Kornpreise erhält man 6 Pfd. Brod für 5 Sgr.?

Antw. 2 Rthlr. 6 Sgr. 8 Pf.

18. Wenn ein Graben, der 82,5 m. lang, 8,5 m. breit und 2 m. tief ist, von 52 Arbeitern in 45 Tagen angefertigt wird; wieviel Arbeiter werden dann angestellt werden müssen, um einen Graben, der 102 m. lang, 5,5 m. breit und 1,25 m. tief ist, in 26 Tagen auszuheben?

Antw. 45 Arbeiter.

19. Wenn 29 Arbeiter, die in 51 Tagen täglich 12 Stunden arbeiten, einen 2784 m. langen, 1,75 m. tiefen und 9 m. breiten Graben ausheben; wie breit wird dann ein Graben, der 3864 m. lang und 2,5 m. tief werden soll, von 23 Arbeitern ausgehoben werden können, wenn diese 68 Tage lang täglich 15 Stunden arbeiten?

Antw 6 m.

20. Jemand will für 110 Rthlr. Tuch kaufen von einer Sorte, von welcher er früher bei $1\frac{7}{8}$ Meter Breite 120 Meter erhielt; ihm wird ein $2\frac{5}{8}$ Meter breites Stück angeboten, wie viel Meter muß das Stück lang sein?

Antw. $117\frac{3}{7}$ Meter.

21. Wieviel Kubikmeter heben 9 Arbeiter, die täglich $10\frac{1}{2}$ Stunden arbeiten, in 25 Tagen aus, wenn 6 Arbeiter bei demselben Boden in 20 Tagen und täglich $12\frac{1}{2}$stündiger Arbeitszeit 576 Kubikmeter ausheben?

Antw. $907\frac{1}{5}$ Kubikmeter.

22. Wie viel Stunden müssen 40 Arbeiter täglich arbeiten, um in 128 Tagen eine dreimal so große Arbeit zu verrichten, als 25 Arbeiter

in 48 Tagen vollendet haben, wenn diese täglich 13½ Stunden arbeiteten?

Antw. 9⅔ Stunden.

23. Wie viel Arbeiter werden angestellt werden müssen, um den dritten Theil von der Arbeit zu verrichten, die 40 Arbeiter, welche täglich 12½ Stunden arbeiteten, in 12½ Tagen beendeten, wenn bei der neuen Arbeit 4⅙ Tag weniger gebraucht werden soll, und wenn an jedem Tage 4⅙ Stunde weniger Arbeitszeit ist?

Antw. 30 Arbeiter.

24. Ein Vorrath von 1200 Ctr. Heu muß für 300 Pferde beschafft werden, damit diese 20 Tage lang die volle Ration erhalten können; wie viel Ctr. werden dann für 650 Pferde angekauft werden müssen, wenn diese nur ¾ der vollen Ration bekommen sollen, aber 5 Tage länger zu futtern sind?

Antw. 2437½ Ctr.

25. Um eine gewisse Anzahl Baumstämme fortzuschaffen, bedarf man während 5 Tagen täglich 30 vierspännige Wagen, deren jeder 3 Fuhren täglich leisten kann. Wieviel zweispännige Wagen, die nur ⅔ soviel als die ersten laden, aber täglich 5 Fuhren leisten, sind erforderlich, um den Transport in einem Tage beendigen zu können?

Antw. 135 Wagen.

26. 17 Arbeiter vollenden in 12 Tagen einen Graben, welcher 1428 m. lang, 1,3 m. breit und 0,72 m. tief ist. Welche Strecke werden 13 Arbeiter in 19 Tagen von einem Graben vollenden, der 1,1 m. breit und 0,52 m. tief ist, und bei welchem die Förderung von 1,375 Kubikmeter eben so viel Zeit erfordert, als beim ersten die Förderung von 1,75 Kubikmetern?

Antw. 2223 Meter.

27. Eine Mühle mahlt auf 4 Gängen bei 112 Umdrehungen in der Minute 9984 Kilogramm Getreide in 24 Stunden; wieviel Kilogramm werden auf 3 Gängen, bei 84 Umdrehungen in der Minute, in 36 Stunden geliefert?

Antw. 8424 Kgr.

28. 6 Arbeiter schaffen in 16 Tagen bei 11stündiger Arbeitszeit 1372,8 Kubikmeter Erde 33,6 Meter weit; in wieviel Tagen werden 9 Arbeiter mehr bei 9½stündiger Arbeitszeit 2010,96 Kubikmeter 39 Meter weit schaffen?

Antw. In 21 Tagen.

29. 25 Arbeiter schaffen in 17 Tagen bei 10½stündiger Arbeitszeit 3825 Kubikmeter Erde 42 Meter weit; wie viele Arbeiter fördern in einer um 6 Tage längeren Arbeitszeit, wenn sie täglich 11 Stunden arbeiten, eine um 591 Kubikmeter größere Masse auf eine um 9 Meter geringere Entfernung?

Antw. 16 Arbeiter.

30. Bei Beginn einer Belagerung befanden sich in einer Festung 2750

Mann, welche für $6\frac{1}{2}$ Monat mit Proviant versehen waren; nach 2 Monaten kommen noch 750 Mann hinzu, welche für sich Proviant auf 3 Monate mitbringen. Wie lange reichen die Vorräthe dann noch für Alle?

Antw. $4\frac{5}{28}$ Monat.

d. Ketten-Regel.

(Zu §. 277.)

1. Jemand hat an einen Anderen 7590 Dukaten zu zahlen. Sie werden einig, die Zahlung in Frd'or. zu machen und 15 Dukaten für 50 Rthlr., 5 Frd'or. aber zu 28 Rthlr. zu rechnen; wieviel Frd'or. sind zu zahlen?

   Antw. $4517\frac{6}{7}$ Frd'or.

2. Wieviel Dukaten machen 1000 Rubel, wenn 2 Rubel gleich 95 Stüver, 20 Stüver gleich 1 Gulden, 5 Gulden gleich 2 Rthlr. Banko, 100 Rthlr. Banko gleich 142 Rthlr. und 3 Rthlr. gleich 1 Duk. sind?

   Antw. $449\frac{2}{3}$ Dukaten.

3. Wieviel betragen 715 Hamburger Pfund in Augsburger Pfund, wenn 106 der ersteren gleich 104 der zweiten sind?

   Antw. $701\frac{23}{53}$ Augsburger Pfund.

4. Wieviel neupreußische Pfunde sind gleich 1 altpreußischen Centner, wenn 1 altpreußischer Centner gleich 110 altpreußischen Pfunden und 10 altpreußische Pfund gleich 9,354 neupreußischen Pfunden sind?

   Antw. 102,894 neupreußische Pfund.

5. Wenn das altpreußische Pfund 1 Rthlr. kostete, was kostet dann das neupreußische Pfund, wenn 1 neupreußisches Pfund gleich 1,069 altpreußischen Pfund ist?

   Antw. 1 Rthlr. 2 Sgr. 1 Pf.

6. Wieviel Schritt wird ein feindliches Geschütz entfernt sein, wenn man zwischen dem Augenblicke des Abfeuerns und dem Knall 30 Spiralschläge einer Taschenuhr zählt, 24 Spiralschläge in 5 Secunden geschehen, so wie, wenn man weiß, daß der Schall in 1 Secunde 896' dc. zurücklegt und 10' dc. gleich 5 Schritt sind?

   Antw. 2800 Schritt.

7. Wieviel Silbergroschen ist ein türkischer Piaster werth? 252 türkische Piaster gelten ebensoviel, als 200 ägyptische, 160 ägyptische ebensoviel, als 63 tunesische und 45 tunesische Piaster erhält man für 8 Rthlr.

   Antw. $1\frac{2}{3}$ Sgr.

8. Wieviel Dresdener Pfund wiegt 1 Kubikfuß Regenwasser in Dresdener Maaß, wenn ein französ. Kubikfuß Regenwasser 70 französ. Pfund wiegt, 9716 holländ. Assen 1 Dresdener Pfund, 10188 holl. Assen 1 franz. Pfund betragen und der franz. Kubikfuß gleich 1,509288 Dresdener Kubikfuß ist?

   Antw. 48,6326 Pfund.

e. Theilungs-Rechnung.

(Zu §. 278. und 279.)

1. Drei Personen A, B und C haben ein Lotterieloos für 26 Rthlr. gekauft, A hat 12, B hat 8 und C nur 6 Rthlr. dazu gegeben. Der Gewinn ist 1300 Rthlr., wieviel erhält Jeder?
   Antw. A 600, B 400, C 300 Rthlr.
2. Ein Kanonenrohr von 18 Ctr. Gewicht enthält auf 100 Pfd. Kupfer 10 Pfd. Zinn, ein anderes von $7\frac{1}{2}$ Ctr. Gewicht auf 100 Pfd. Kupfer $11\frac{1}{2}$ Pfd. Zinn. Wenn beide zusammengeschmolzen werden, wieviel Zinn ist dann auf 100 Pfd. Kupfer in der Mischung?
   Antw. $10\frac{825}{1888}$ Pfd. Zinn.
3. Drei Stück Sammet von gleicher Breite, Farbe und Güte wurden vom Kaufmann B für 448 Rthlr. verkauft. Wie theuer war jedes einzelne Stück, wenn das erste $30\frac{1}{2}$, das zweite 32 und das dritte Stück $33\frac{1}{2}$ Meter lang war?
   Antw. $142\frac{1}{3}$ Rthlr., $149\frac{1}{3}$ Rthlr. und $156\frac{1}{3}$ Rthlr.
4. Drei Kaufleute machten einen gemeinschaftlichen Kornhandel; der eine gab dazu 15000 Rthlr., der zweite 45000 Rthlr., der dritte 30000 Rthlr. Sie verlieren dabei 9600 Rthlr. Wieviel Verlust erleidet Jeder?
   Antw. 1600 Rthlr., 4800 Rthlr. und 3200 Rthlr.
5. Wieviel Salpeter, Schwefel und Kohle sind in 1520 Pfd. Pulver enthalten, wenn auf 100 Pfd. Pulver 75 Theile Salpeter, $11\frac{1}{2}$ Theil Schwefel und $13\frac{1}{2}$ Theil Kohle gerechnet werden?
   Antw. 1140 Pfd. Salpeter, $174\frac{4}{5}$ Pfd. Schwefel, $205\frac{1}{5}$ Pfd. Kohle.
6. 153 Rthlr. sollen unter 4 Invaliden A, B, C, D nach Verhältniß ihres Alters vertheilt werden. In Bezug hierauf verhält sich $A:B = 4:5$, $D:A = 3:2$ und $C:A = 1:2$. Wieviel erhält Jeder?
   Antw. A 36 Rthlr., B 45 Rthlr., C 18 Rthlr. und D 54 Rthlr.
7. 21000 Rthlr. sollen unter 4 Gläubiger A, B, C, D nach dem Verhältniß ihrer Forderungen vertheilt werden. In Bezug auf diese Forderungen verhält sich $A:B = 2:3$, $B:C = 4:5$ und $D:C = 7:6$. Wieviel erhält Jeder?
   Antw. A 3200, B 4800, C 6000 und D 7000 Rthlr.
8. Drei Personen A, B, C haben gemeinschaftlich ein Geschäft betrieben und dabei 500 Rthlr. gewonnen. A war mit 1200 Rthlr. 8 Monat lang Theilnehmer, B mit 800 Rthlr. 10 Monat lang, C mit 600 Rthlr. 14 Monat lang. Wieviel bekommt Jeder vom Gewinn?
   Antw. A $184\frac{8}{13}$, B $153\frac{11}{13}$ und C $161\frac{7}{13}$ Rthlr.
9. Drei Meister A, B, C bekommen zusammen 1312 Rthlr. A hat 12 Gesellen 10 Wochen, wöchentlich 5 Tage; B 8 Gesellen 11 Wochen, wöchentlich 6 Tage, und C hat 40 Gesellen 3 Wochen, wöchentlich 7 Tage arbeiten lassen. Wieviel erhält jeder Meister?
   Antw. A 400, B 352 und C 560 Rthlr.
10. 1253 Rthlr. sollen unter 4 Invaliden A, B, C, D nach Verhältniß ihres Alters und ihrer Dienstzeit vertheilt werden. A dient 30, B

25, C 20 und D 15 Jahre. In Bezug auf das Alter verhält sich B : C = 2 : 4½, D : A = ⅓ : 4, A : C = 2⅓ : 3¼. Wieviel wird Jeder erhalten?

Antw. A 504, B 260, C 468 und D 21 Rthlr.

f. Einfache Zins-Rechnung.

(Zu §. 280.)

1. Wieviel Zinsen geben 1850 Rthlr. zu 4 pCt. in 12 Jahren?
   Antw. 888 Rthlr.
2. Wie groß ist der künftige Werth von 10000 Rthlr. zu 4 pCt. nach 3½ Jahr?
   Antw. 11400 Rthlr.
3. Wie groß ist das Kapital, welches zu 4 pCt. ausgeliehen, in 6 Jahren 1000 Rthlr. Zinsen giebt?
   Antw. 4166 Rthlr. 20 Sgr.
4. Wieviel Jahre müssen 1000 Rthlr. zu 4 pCt. auf Zinsen stehen, um 1000 Rthlr. Zinsen zu bringen?
   Antw. 25 Jahre.
5. Zu wieviel pCt. müssen 1000 Rthlr. ausgeliehen werden, wenn sie in 20 Jahren 1000 Rthlr. Zinsen bringen sollen?
   Antw. 5 pCt.
6. Wieviel hat Jemand in der Woche zu verzehren, der von seinen Zinsen lebt, wenn er 14600 Rthlr. zu 5 pCt. ausstehen hat? *)
   Antw. 14 Rthlr.
7. Wenn ein Wucherer sich wöchentlich für jeden ausgeliehenen Rthlr. 1 Sgr. Zinsen geben läßt, zu wieviel pCt. hat er sein Geld angelegt? *)
   Antw. 173⅓ pCt.
8. Wie groß ist der heutige Werth von 1000 Rthlr., die nach 6 Jahren zu 4 pCt. zahlbar sind?
   Antw. 806 Rthlr. 13 Sgr. $6\frac{18}{31}$ Pf.
9. Jemand will 1350 Rthlr., die erst nach 7 Jahren zahlbar sind, sogleich mit 5 pCt. Disconto zahlen, wieviel muß er zahlen?
   Antw. 1000 Rthlr.
10. Jemand kauft für 100 Rthlr. 25 Sgr. Bücher mit 12 pCt. Rabatt von 100, wieviel ist baar zu zahlen?
    Antw. 88 Rthlr. 22 Sgr.
11. Wieviel pCt. Rabatt von Hundert hat ein Lieferant gegeben, wenn er pro Ctr., der nach dem Preis-Courant 67 Rthlr. kostet, nur 61 Rthlr. 29 Sgr. 3 Pf. anrechnet?
    Antw. 7½ pCt.
12. Es hat Jemand eine Rechnung von 75 Rthlr. zu bezahlen und soll davon 3¾ pCt. Rabatt von Hundert abziehen, wieviel hat er zu entrichten?
    Antw. 72 Rthlr. 5 Sgr. 7½ Pf.

---

*) Das Jahr zu 52⅐ Wochen gerechnet.

13. Jemand bezahlt für Bücher 270 Rthlr. 15 Sgr. bei $33\frac{1}{3}$ pCt. Rabatt von Hundert, welches ist der eigentliche Werth der Bücher?
Antw. 405 Rthlr. 22 Sgr. 6 Pf.

14. Es kauft Jemand für 16200 Rthlr. Waare mit 10 pCt. Rabatt auf Hundert, wieviel muß er baar bezahlen?
Antw: 14727 Rthlr. 8 Sgr. $2\frac{2}{11}$ Pf.

15. Ein Fabrikant A verkauft eine Waare zu 10 pCt. Rabatt von Hundert, ein anderer B dagegen dieselbe Waare zu 10 pCt. Rabatt auf Hundert; bei welchem Fabrikanten kauft man am besten, und wieviel beträgt der Unterschied in den Preisen, wenn für 1000 Rthlr. Waare gekauft wird?
Antw. Bei A kauft man um 9 Rthlr. 2 Sgr. $8\frac{8}{11}$ Pf. billiger.

16. Wieviel sind 160 Rthlr. Gold in Courant, wenn das Gold 13 pCt. steht?
Antw. 180 Rthlr. 24 Sgr.

17. Wieviel sind 90 Frd'or. in Courant, wenn das Gold $13\frac{1}{3}$ pCt. steht?
Antw. 510 Rthlr. Courant.

18. Wieviel beträgt das Agio für 1 Frd'or., wenn das Gold 14 pCt. steht?
Antw. 21 Sgr.

19. Jemand hat 900 Rthlr. in Gold zu zahlen, will aber die Zahlung in Courant leisten; wieviel hat er zu zahlen, wenn das Gold $12\frac{3}{5}$ pCt. steht?
Antw. 1013 Rthlr. 12 Sgr.

20. Jemand hat 597 Rthlr. in Courant zu zahlen, will aber so viel als möglich Frd'or. angeben, wieviel muß er zahlen, wenn der Cours des Goldes 12 pCt. beträgt?
Antw. 106 Frd'or. und 3 Rthlr. 12 Sgr.

21. Wieviel betragen $3615\frac{1}{2}$ Rthlr. in Staatsschuldscheinen à $84\frac{7}{8}$ pCt.?
Antw. 3068 Rthlr. 19 Sgr. $8\frac{1}{40}$ Pf.

22. Wieviel betragen 1719 Rthlr. 24 Sgr. in Staatsschuldscheinen à $93\frac{1}{2}$ pCt.
Antw. 1608 Rthlr. $4\frac{17}{25}$ Pf.

23. Wieviel betragen 4560 Rthlr. Eisenbahn-Actien à $93\frac{1}{2}$ pCt. mit Zinsen à 4 pCt. für 1 Jahr 8 Monat?
Antw. 4567 Rthlr. 18 Sgr.

24. Ein Faß Waaren wiegt 1 Ctr. $75\frac{1}{2}$ Pfd. Brutto, die Tara beträgt $13\frac{1}{3}$ pCt., was wiegt es Netto?
Antw. 152 Pf. 5 Nlth.

25. Das Nettogewicht einer Waare beträgt 3 Ctr. $25\frac{2}{3}$ Pfd., die Tara $16\frac{1}{2}$ pCt., wie groß war das Bruttogewicht?
Antw. 390 Pfd. $\frac{800}{801}$ Nlth.

26. 5 Ct. 64 Pfd. mit $8\frac{1}{2}$ pCt. Tara und $\frac{3}{4}$ pCt. für Gutgewicht, sind à $1\frac{1}{2}$ Rthlr. das Pfd. gekauft worden; was hat man bezahlt?
Antw. 768 Rthlr. 8 Sgr. 6,357 Pf.

g. **Folgende Verhältnisse sind durch die Theorie der Kettenbrüche in kleineren Zahlen auszudrücken.**

1. Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie eines Kreises = 1 : 3,141592653
   Antw. 1:3, 7:22, 106:333, 113:355 u. s. w.
2. Das Verhältniß eines preuß. Fußes zu einem engl. Fuße = 120000 : 116537.
   Antw. 1:1, 34:33, 35:34, 69:67, 104:101, 693:673 u. s. w.
3. Das Verhältniß eines preuß. Fußes zu einem russischen Fuße = 100000 : 171494.
   Antw. 1:1, 1:2, 3:5, 4:7, 7:12, 214:367 u. s. w.
4. Das Verhältniß eines neupreuß. Pfundes zu einem altpreuß. Pfunde = 1,069036192 : 1.
   Antw. 1:1, 15:14, 31:29, 511:478, 1053:985 u. s. w.
5. Das Verhältniß des synodischen Mondmonats (d. h. der Zeit von einem Neumonde zum andern) = 29,530588 Tage zum tropischen Sonnenjahre = 365,24222 Tage.
   Antw. 1:12, 2:25, 3:37, 8:99, 11:136, 19:235 u. s. w.
6. Das Verhältniß des preuß. Fußes = 139,13 Pariser Linien zum Meter = 443,296 Pariser Linien.
   Antw. 1:3, 5:16, 11:35, 16:51, 43:137 u. s. w.
7. In einer Lotterie von 10000 Losen waren nur 1369 Gewinne. Wie verhält sich die Anzahl der Lose zu der der Gewinne in kleineren Zahlen?
   Antw. 7:1, 22:3, 73:10, 95:13, 168:23, 1103:151 u. s. w.
8. In einem Gefecht sind von 23000 Mann 1257 Mann gefallen. Wie verhält sich die Anzahl der Gefallenen zu der Anzahl der Kämpfenden?
   Antw. 1:18, 3:55, 7:128, 10:183, 37:677, 84:1537 u. s. w.

h. Anwendung der Gleichungen.

(Zu §. 281—285.)

A. Aufgaben zu Gleichungen vom ersten Grade.

1. Wie heißt die Zahl, deren Hälfte, vierter und fünfter Theil zusammen 95 betragen?
   Antw. 100.
2. Welche Zahl giebt zu 4 addirt ebensoviel, als mit 4 multiplicirt?
   Antw. $\frac{4}{3}$.
3. Wenn man von 100 eine gewisse Zahl subtrahirt, so bleibt eben so viel übrig, als wenn man 20 von der dreifachen unbekannten Zahl subtrahirt. Wie heißt diese Zahl?
   Antw. 30.
4. Ein Vater ist a, sein Sohn b Jahre alt. Vor wieviel Jahren war der Vater n mal so alt, als der Sohn?

Antw. Vor $\frac{nb - a}{n - 1}$ Jahren.

5. Wieviel Schafe hast du? fragte A den B. Hierauf antwortete dieser: „Wenn ich dir den 4ten und 5ten Theil meiner Schafe geben würde, dann hättest du nur 20 Schafe mehr als mir blieben." Wieviel Schafe muß nun B haben, wenn A deren 40 hat?
Antw. 200 Schafe.

6. Wieviel Studenten sind auf der hiesigen Universität? fragte ein Durchreisender. Man gab ihm zur Antwort: Drei Viertheile von den Studenten sind Inländer, ein Fünftheil besteht aus Ausländern, und 30 sind Hospitanten. Wieviel Studenten waren es nun?
Antw. 600 Studenten.

7. Jemand zahlt für eine Summe von 600 Rthlr. 90 Stück Friedrichsd'or und 91 Rthlr. Wie hoch wurde der Frd'or gerechnet?
Antw. Zu 5 Rthlr. 19 Sgr. 8 Pf.

8. Eine Festung hat eine Garnison von 3520 Mann; darunter sind 3 mal so viel Artilleristen, als Kavalleristen und 4mal so viel Infanteristen, als Artilleristen. Wieviel Mann von jeder Truppengattung befinden sich nun darin?
Antw. 220 Kavalleristen, 660 Artilleristen und 2640 Infanteristen.

9. Jemand verschenkt von seinem Gelde zuerst $\frac{1}{3}$ weniger 100 Rthlr., dann von dem Rest $\frac{1}{2}$ weniger 50 Rthlr. und behält 1100 Rthlr. übrig. Wieviel hatte er anfangs?
Antw. 3000 Rthlr.

10. Ein Kaufmann verkauft eine Waare für 15571 Rthlr. und gewinnt dabei 15 pCt., was hat ihm die Waare gekostet?
Antw. 13540 Rthlr.

11. Man verleiht zu gleicher Zeit zwei Kapitale, eins von 600 Rthlr. zu 4 pCt., das andere von 900 Rthlr. zu 5 pCt. In wieviel Jahren werden beide Kapitale zusammen 483 Rthlr. Zinsen gebracht haben?
Antw. In 7 Jahren.

12. Man verleiht ein Kapital von 300 Rthlr. zu $5\frac{1}{2}$ pCt., ein anderes zu gleicher Zeit zu 4 pCt. Es werden die 6 Jahre lang rückständigen Zinsen mit 267 Rthlr. bezahlt; wie groß ist das zweite Kapital?
Antw. 700 Rthlr.

13. Man theile die Zahl 100 in zwei Theile, so daß, wenn man den größeren Theil mit 5 und den kleineren mit 10 multiplicirt, die Differenz dieser Produkte 200 betrage. Wie heißen die Theile?
Antw. 80 und 20.

14. Ein Sohn erkundigte sich bei einem Pfarrer nach dem Alter seiner Eltern, worauf ihm dieser zur Antwort gab: „Das Alter deiner Eltern beträgt jetzt 81 Jahre, und deine Mutter wird erst nach 12 Jahren so alt sein, wie jetzt dein Vater ist." Wie alt waren Vater und Mutter?
Antw. Der Vater $46\frac{1}{2}$ und die Mutter $34\frac{1}{2}$ Jahr.

15. Ein Vater hinterließ seinen 9 Kindern ein Vermögen von 6650 Rthlr. und hatte verordnet, daß jeder Sohn 850 Rthlr. und jede Tochter 600 Rthlr. bekommen sollte. Wieviel Söhne und Töchter waren es?
Antw. 5 Söhne und 4 Töchter.

16. Eine Waldfläche von 1911 Hektar ist mit Eichen, Buchen und Kiefern bepflanzt. Wenn nun die Fläche der Kiefern 104 Hektar mehr, als $\frac{7}{15}$ jener der Buchen beträgt, und der Eichenwald 90 Hektar mehr enthält, als $\frac{4}{5}$ der Fläche des Buchenwaldes, wieviel Hektar kommen auf jede der genannten Baumarten?
Antw. 765 Hektar auf Buchen, 685 auf Eichen und 461 auf Kiefern.

17. Eine Bäuerin bringt eine gewisse Anzahl Eier zu Markte. Zuerst verkaufte sie die Hälfte aller Eier und noch ein halbes dazu, ohne eins zu zerbrechen; hierauf die Hälfte des Restes und abermals ein halbes Ei dazu; ebenso zum dritten, vierten und fünften Male. Zuletzt blieb ihr ein Ei übrig; wie viel Eier bot sie zum Verkaufe aus?
Antw. 63 Stück.

18. Ich kenne eine sechsziffrige Zahl, deren letzte Ziffer linker Hand 1 ist. Bringe ich diese Ziffer an die erste Stelle rechter Hand, so erhalte ich das Dreifache der ersten Zahl. Wie heißt die Zahl?
Antw. 142857.

19. Eine Magd erhielt jährlich 21 Rthlr. und ein Kleid zum Lohne. Nach $7\frac{1}{2}$ Monat verließ dieselbe ihren Dienst und empfing, weil sie das Kleid schon erhalten hatte, nur 12 Rthlr. Lohn. Wie hoch wurde das Kleid gerechnet?
Antw. 3 Rthlr.

20. Welche Zahl muß man zum Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{a}{b}$ addiren oder subtrahiren, damit der neue Bruch der umgekehrte Werth des gegebenen wird?
Antw. $\mp(a+b)$.

21. Wenn man den Zähler des Bruches $\frac{7}{20}$ um dieselbe Zahl vermindert, um welche man den Nenner vergrößert, dann differirt der neue Bruch von dem gegebenen um 0,29. Wie heißt jene Zahl?
Antw. 5.

22. In einer Festung befinden sich $2\frac{1}{2}$ mal so viel Artilleristen und $19\frac{5}{6}$ mal soviel Infanteristen als Kavalleristen. Nach einem feindlichen Angriff betrug die Besatzung noch 6077 Mann, indem der 77ste Theil der Infanterie, der 60ste Theil der Artillerie und 4 Kavalleristen getödtet wurden. Wie stark war vor dem Angriff die Besatzung.
Antw. 264 Kavalleristen, 660 Artilleristen und 5236 Infanteristen.

23. Ein Student erhält jährlich 60 Rthlr. nebst freie Wohnung, wenn er dem Sohne des Hauses täglich 2 Stunden Unterricht ertheilt.

Drei Vierteljahre nach diesem Vertrage stirbt der Sohn; der Student darf zwar bis zu Ende des Jahres in der Wohnung bleiben, erhält aber 24 Rthlr. weniger, als er bei dem Leben des Sohnes erhalten hätte. Wie hoch wurde die Wohnung angeschlagen?
Antw. 36 Rthlr.

24. Es wurde an Jemand eine Jagd verpachtet unter der Bedingung, daß er jährlich 150 Rthlr. bezahle und zwei starke Hirsche liefere. Der Jagdpächter starb 2 Monate nach der Uebernahme der Jagd, nachdem er bereits die Hirsche abgeliefert hatte, worauf seine Frau noch 8 Rthlr. zurück bekam. Wie hoch schätzte man die Hirsche?
Antw. Jeden 19 Rthlr. 24 Sgr.

25. Eine Mutter ist 66 Jahre und ihre Tochter gerade halb so alt. Vor wieviel Jahren war die Mutter 4mal so alt, als die Tochter?
Antw. Vor 22 Jahren.

26. Mein Bruder ist gegenwärtig noch einmal, und war vor 8 Jahren dreimal so alt, als ich. Wie alt sind wir nun?
Antw. 32 und 16 Jahre.

27. Jemand soll in 4 Terminen folgende Zahlungen leisten: 300 Rthlr. nach 4 Monaten, 400 Rthlr. nach 8 Monaten, 500 Rthlr. nach einem Jahre und 700 Rthlr. nach 2 Jahr 10 Monat. Wann kann er die ganze Summe ohne Verlust für die Betheiligten auf einmal zahlen?
Antw. Nach 18 Monaten.

28. Eine Gemeinde kauft eine Waldung, bezahlt 5800 Rthlr. baar und verspricht 3600 Rthlr. nach 2, 3000 Rthlr. nach $4\frac{1}{2}$, 2500 Rthlr. nach 7 und den Rest nach 10 Jahren zu bezahlen. Statt dessen wünscht der Verkäufer die ganze noch zahlbare Summe nach 5 Jahren zu erhalten. Welche Summe darf er dann fordern?
Antw. Noch 10560 Rthlr.

29. Drei Schreiber sollen 295 Bogen abschreiben. Der erste kann in 3 Stunden 5 Bogen, der zweite in 2 Stunden 3 Bogen und der dritte in 4 Stunden 7 Bogen liefern. Wann werden sie fertig, wenn sie alle drei zugleich schreiben?
Antw. In 60 Stunden.

30. Ein Silberarbeiter soll einen 20 Mark schweren Pokal aus 11löthigem Silber verfertigen. Nun hat er bloß 14- und 9löthiges Silber, wieviel Mark muß er von jeder Gattung dazu nehmen?
Antw. Vom 14löthigen Silber 8 und vom 9löthigen 12 Mark.

31. 3 Mark 15löthiges Silber, 5 Mark 11löthiges und 4 Mark 8löthiges werden zusammengeschmolzen, wieviel löthig ist die Mischung?
Antw. 11löthig.

32. Wieviel Kupfer muß zu 35 Mark 15löthigem Silber gesetzt werden, damit die Legirung 12löthig werde?
Antw. $8\frac{3}{4}$ Mark.

33. Zwei Körper bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises gleich-

förmig gegeneinander. Zwischen beiden ist im Anfange ein Bogen von 9 Meter, zum ersten Male treffen sie sich nach 2, zum zweiten Male nach 10 Minuten. Wie groß ist die Peripherie des Kreises?
Antw. 36 Meter.

34. Ein Wasserbehälter kann durch 4 Röhren gefüllt werden, durch die erste geschieht es in a, durch die zweite in b, durch die dritte in c und durch die vierte in d Stunden. Wieviel Stunden sind erforderlich, den Behälter zu füllen, wenn die vier Röhren gleichzeitig fließen?
Antw. $\frac{abcd}{abc + abd + acd + bcd}$ Stunden.

35. An einem Mühlenteiche befinden sich 3 Schleusen, zwei zum Zufluß und die dritte zum Abfluß. Ist der Teich leer, so kann er durch Oeffnung der ersten Schleuse in $1\frac{1}{4}$ Tag, durch Oeffnung der zweiten Schleuse in $1\frac{3}{4}$ Tag angefüllt werden; ist aber der Teich voll, so kann ihn die dritte Schleuse in $\frac{3}{4}$ Tag ausleeren. In wieviel Tagen wird der leere Teich angefüllt sein, wenn alle drei Schleusen zugleich geöffnet werden?
Antw. In $26\frac{1}{4}$ Tagen.

36. Ein Bote geht von einem Orte A nach einem Orte M und macht täglich 5 Meilen. Zu derselben Zeit geht ein anderer Bote von einem um 12 Meilen mehr rückwärts gelegenen Orte B nach M und macht täglich 7 Meilen. Nach wieviel Tagen und in welcher Entfernung von B werden beide Boten zusammentreffen?
Antw. Nach 6 Tagen, und zwar 42 Meilen von B.

37. Zwei Freunde, welche 78 Meilen von einander entfernt wohnen, verabreden sich, einander entgegen zu reisen. Beide reisen gleichzeitig ab, der eine macht täglich $5\frac{1}{4}$ und der andere täglich $7\frac{3}{4}$ Meilen. Wann und in welcher Entfernung treffen sie zusammen?
Antw. Nach 6 Tagen und in einer Entfernung von $31\frac{1}{2}$ Meilen vom Wohnorte des ersten.

38. Ein feindliches Corps ist vor 2 Tagen von einem Orte aufgebrochen und macht täglich $4\frac{1}{2}$ Meile. Man will ihm von demselben Orte aus nachsetzen und zwar so schnell, daß man es in 8 Tagen erreicht habe. Wie viel Meilen müssen zu dem Ende täglich gemacht werden?
Antw. 6 Meilen.

39. Um 8 Uhr Morgens fahre ich mit dem Postwagen von A nach B, zu gleicher Zeit geht ein Dampfwagen auf einer neben der Poststraße liegenden Eisenbahn von B nach A. Um halb 10 Uhr treffe ich mit dem Dampfwagen zusammen, halte mich gegen Mittag eine halbe Stunde auf und komme Abends 6 Uhr in B an. Um wieviel Uhr langte der Dampfwagen in A an?
Antw. Um 9 Uhr $46\frac{7}{8}$ Minuten.

40. Um 12 Uhr stehen die beiden Zeiger einer Uhr über einander. Wann und wie oft werden diese beiden Zeiger in den nächsten 12 Stunden über einander stehen?

Antw. Zum ersten Male um 1 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten, zum zweiten Male um 2 Uhr $10\frac{10}{11}$ Minuten u. s. w., jedesmal 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Minuten später. Im Ganzen werden sie 11mal über einander stehen.

41. Wie oft und wann werden die beiden Zeiger einer Uhr in gerader Linie gegenüber stehen?

Antw. In 12 Stunden 11mal, und zwar um 12 Uhr $32\frac{8}{11}$ Minuten, dann um 1 Uhr $38\frac{2}{11}$ Minuten u. s. w., jedesmal 1 Stunde $5\frac{5}{11}$ Minuten später.

42. Ich habe so viel Silbergroschen bei mir, daß, wenn ich ihre Anzahl durch 3 dividire, zum Quotienten 4 addire, bei der Summe die Null zur Rechten weglasse, dann 1 subtrahire, den Rest mit 2 multiplicire, eine Null zur Rechten anhänge und darauf 4 addire, die Summe durch 2 radicire, 8 erhalte. Wie viel Sgr. sind es?

Antw. 108.

43. Aus einem mit Wein gefüllten Fasse zapfte Jemand den 12ten Theil ab, am folgenden Tage vom Reste den 11ten Theil und füllte darauf mit 21 Liter wieder auf, so daß das Faß wieder voll wurde. Wie viel Liter hielt das Faß?

Antw. 120.

44. Es braucht Jemand 44 Ctr. Steinkohlen und will für den Centner 24 Sgr. geben. Nun hat der Verkäufer 2 Sorten, eine, von der ein Ctr. 18. Sgr., und eine, von der er 29 Sgr. kostet; wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

Antw. 20 Ctr. von der Sorte zu 18 Sgr., 24 Ctr. von der zu 29 Sgr.

45. Von zwei Geldsummen ist eine um 10 Thlr. kleiner als die andere. Legt man 12 Thlr. 15 Sgr. der kleineren zur größeren und den dritten Theil der vergrößerten zu dem Reste der anderen; wie groß sind dann die beiden Geldwerthe, wenn man weiß, daß sie dadurch gleich geworden sind.

Antw. 35 Thlr.

46. Ein Hase, der von einem Hunde verfolgt wird, hat 90 Sprünge voraus und macht in derselben Zeit 5 Sprünge, in welcher der Hund deren 4 macht. Wenn nun 7 Hasensprünge an Größe soviel betragen, als 5 Hundesprünge, wieviel Sprünge muß der Hund noch machen, um den Hasen einzuholen?

Antw. 600 Sprünge.

47. Es verlieren 21 Pfund Silber, in Wasser versenkt, 2 Pfd., und 42 Pfd. Kupfer verlieren auf dieselbe Art 5 Pfd. am Gewicht. Nun hat man eine Stange, welche aus Silber und Kupfer besteht und $26\frac{1}{4}$ Pfd. in der Luft wiegt, in Wasser versenkt und dabei einen Gewichtsverlust von 3 Pfd. bemerkt; es fragt sich, wie viel Pfd. Silber und wie viel Pfd. Kupfer die Stange enthalte?

Antw. $5\frac{1}{4}$ Pfd. Silber und 21 Pfd. Kupfer.

48. Die Krone des Königs Hiero von Syrakus war 18 Pfd. schwer und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfd. Sie war also nicht aus reinem Golde verfertigt, da sie in diesem Falle nur 1 Pfd. verloren haben würde. Wäre sie nur aus Silber verfertigt gewesen, so würde sie im Wasser nur $16\frac{1}{4}$ Pfd. gewogen haben. Aus wieviel Pfd. Gold und Silber bestand die Krone?
Antw. Aus 12 Pfd. Gold und 6 Pfund Silber.

49. In einer Versammlung von 48 Personen wird ein Vorschlag mit einer Stimmenmehrheit von 18 Personen angenommen. Wie viele haben für, und wie viele gegen den Vorschlag gestimmt?
Antw. 33 dafür und 15 dagegen.

50. Jemand hat 2 Becher nebst einem auf beide passenden Deckel; setzt er den Deckel auf den ersten Becher, so ist dieser noch einmal soviel werth, als der zweite; setzt er dagegen den Deckel auf den zweiten Becher, so ist letzterer $1\frac{1}{3}$ Mal soviel werth als ersterer. Wenn nun ohne Deckel jeder Becher 10 Rthlr. weniger werth ist, als mit Deckel, wieviel kostet jeder der beiden Becher?
Antw. Der eine 18, der andere 14 Rthlr.

51. Wie heißt der Bruch, der, wenn man zum Zähler 15 und zum Nenner 8 addirt, die Zahl 2, und wenn man vom Zähler 15 und vom Nenner 8 abzieht, die Zahl 1 giebt?
Antw. Der Zähler 13 und der Nenner 6.

52. Drei Zahlen von folgender Beschaffenheit zu finden: die erste ist um 3 größer, als die halbe Summe der beiden andern; die zweite ist um 1 größer, als der dritte Theil der Summe der beiden andern; die dritte ist um 1 kleiner als der vierte Theil der Summe der beiden andern.
Antw. 5,3 und 1.

53. Es wird eine dreiziffrige Zahl gesucht, die so beschaffen ist, daß, wenn man die erste Ziffer linker Hand fortnimmt und rechter Hand anhängt, man eine Zahl erhält, die um 90 kleiner ist. Nimmt man dagegen die mittlere heraus und hängt sie rechter Hand an, so ist die entstandene Zahl um 9 Einheiten größer, als die gegebene. Die Summe ihrer Ziffern ist 14. Wie groß ist diese Zahl?
Antw. 545.

54. Wie alt bist du? fragte ein Sohn seinen Vater. Dieser gab darauf zur Antwort: „Nach 12 Jahren wirst du eben so alt sein, wie ich vor 12 Jahren war, und ich werde nach 12 Jahren 3 mal so alt sein, als du vor 12 Jahren warst." Wie alt ist nun jeder?
Antw. Der Vater 60 und der Sohn 36 Jahre.

55. Von allen bis jetzt bekannten Säugethieren ist die Spitzmaus das kleinste. Ihr Gewicht ist so gering, daß, wenn man es in Neuloth ausdrückt, man einen Bruch erhält, der einer Einheit gleich wird, wenn man den Zähler um 7 vermehrt und den Nenner zugleich um

12 vermindert; vermehrt man dagegen den Zähler um 1 und den Nenner um 6, so erhält man $\frac{1}{4}$. Wie viel Gramm wiegt die Spitzmaus?

Antw. $2\frac{1}{14}$ Gramm.

56. Vor einiger Zeit kostete der Scheffel Waizen 1 Thlr. und der Scheffel Roggen sogar 1 Thlr. 1 Sgr. weniger, als heute. Damals verhielt sich der Preis des Waizens zu dem des Roggens wie 3 : 2, heute wie 4 : 3. Wie theuer ist jetzt der Scheffel von jeder Sorte?

Antw. Der Scheffel Waizen 4 Thlr. 12 Sgr., Roggen 3 Thlr. 9 Sgr.

57. Ein Wasserbehälter von 210 Kubikmeter kann durch 2 Röhren gefüllt werden. Als einst die erste 4, die andere 5 Stunden offen war, erhielt man 90 Kubikmeter. Als ein anderes Mal die erste 7, die zweite $3\frac{1}{2}$ Stunde offen war, erhielt man 126 Kubikmeter. Wie viel Kubikmeter giebt jede Röhre in einer Stunde, und wie lange müssen beide gleichzeitig fließen, um den Behälter zu füllen?

Antw. Die erste giebt in einer Stunde 15 Kubikmeter, die andere 6; wenn beide fließen, wird der Behälter in 10 Stunden gefüllt.

58. Ein Silberarbeiter hat 2 Stücke Silber; das eine enthält 30 Gramm Kupfer und 50 Gramm Silber, das andere 32 Gramm Kupfer und 96 Gramm Silber. Nun soll er einen Becher verfertigen, welcher 10 Gramm Kupfer und 24 Gramm Silber enthalte; wie viel Gramm muß er nun von jedem der beiden Stücke zur Legirung nehmen?

Antw. Vom ersten Stück 12 und vom zweiten 22 Gramm.

59. Zwei Frauen nahmen bei dem Verkauf von Eiern gleich viel ein, obgleich sie nicht gleich viel verkauften. Hätte jede zu dem Preise der anderen verkauft, so würde die erste 3 Thlr. 15 Sgr. mehr, die zweite 2 Thlr. 3 Sgr. weniger eingenommen haben, als sie wirklich einnahmen. Wenn sie nun im Ganzen 12 Schock verkauften; wie viel und wie theuer verkaufte dann jede?

Antw. Die erste $7\frac{1}{2}$ Schock zu 21 Sgr., die zweite $4\frac{1}{2}$ Schock zu 1 Thlr. 5 Sgr.

60. Jemand kaufte für 40 Thlr. Butter und für eben so viel Thlr. Eier. Beim Verkauf nahm er 25 Procent Gewinn, so daß er an einem Tage, an welchem er 30 Pfund Butter und 24 Schock Eier verkaufte, 6 Thlr. 15 Sgr. Gewinn hatte, und er sich an einem andern Tage, an welchem er 45 Pfund Butter und 16 Schock Eier verkaufte, 30 Thlr. bezahlen ließ. Wie viel und zu welchem Preise hatte er gekauft?

Antw. 150 Pfund Butter zu 8 Sgr. und $53\frac{1}{3}$ Schock Eier zu $22\frac{1}{2}$ Sgr.

61. Dividire ich eine von zwei Zahlen durch die andere, so erhalte ich

zum Quotienten $a - b^2$, zum Reste $b + b^4$. Dividire ich die zweite Zahl durch die erste, so erhalte ich zum Quotienten $b - a^2$ und zum Reste $a + a^4$. Wie heißen die beiden Zahlen?

Antw. $a^2 + b$ und $a + b^2$.

62. Für 7 Frd'or und 9 Dukaten erhielt ich von einem Geldwechsler 68 Rthr. 5 Pf., und für 11 Frd'or und 3 Dukaten 71 Rthlr. 20 Sgr. 7 Pf.; wie hoch wurde jede der beiden Geldsorten gerechnet?

Antw. Der Frd'or zu 5 Rthlr. 19 Sgr. 8 Pf. und der Dukaten zu 3 Rthlr. 4 Sgr. 9 Pf.

63. Drei Maurer, A, B und C, sollen eine Mauer aufführen. A und B würden, gemeinschaftlich arbeitend, damit in 12, B und C in 20, A und C in 15 Tagen zu Stande kommen. Wie viel Tage würde jeder einzeln brauchen, und in welcher Zeit würden damit alle 3, wenn sie gemeinschaftlich arbeiten, fertig werden?

Antw. A in 20, B in 30, C in 60 und A, B und C zusammen in 10 Tagen.

64. In einem Zeughause befinden sich Kanonenkugeln in drei verschiedenen Haufen. Ein Officier läßt nun vom ersten Haufen ein Fünftel auf den zweiten und ein Fünftel auf den dritten; hierauf von den Kugeln, die sich jetzt im zweiten Haufen befinden, ein Fünftel auf den ersten und ein Fünftel auf den dritten Haufen legen; alsdann läßt er noch von den Kugeln, die den dritten Haufen nun ausmachen, den fünften Theil auf den ersten und eine gleiche Anzahl davon auf den zweiten legen, worauf sich in jedem Haufen 540 Kugeln befinden. Wie waren diese Kugeln anfänglich vertheilt?

Antw. Im ersten Haufen waren 400, im zweiten 520 und im dritten 700 Kanonenkugeln.

65. In jedem von 7 Körben befinden sich eine gewisse Anzahl Aepfel. Lege ich aus dem ersten Korbe in jeden der übrigen so viel, als sie enthalten, hierauf aus dem zweiten in jeden der übrigen so viel, als sie enthalten u. s. w. bis zum letzten, so enthält jeder Korb 128 Aepfel. Wieviel enthielt jeder Korb vor der Vertheilung?

Antw. Der erste 449, der zweite 225, der dritte 113, der vierte 57, der fünfte 29, der sechste 15 und der siebente 8 Aepfel.

B. Aufgaben zu Gleichungen vom zweiten Grade.

1. Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß die Quadratwurzel aus ihr um 0,24 größer ist, als sie selbst?

Antw. 0,36, so wie 0,16.

2. Wie heißt die Zahl, welche ihr Quadrat um $\frac{5}{36}$ übertrifft?

Antw. $\frac{5}{6}$ oder $\frac{1}{6}$.

3. Zwei Zahlen zu finden, von denen man weiß, daß die eine um 20 größer ist, als die andere, und daß man 34 erhält, wenn man die größere durch die kleinere dividirt und den Quotienten zur Summe der beiden Zahlen addirt.

18*

Antw. Die beiden Zahlen 24 und 4, sowie 22½ und 2½ entsprechen den gestellten Bedingungen.

4. Welche Eintheilungszahl hat ein Zahlensystem, in welchem die decadische Zahl 769 durch 541 bezeichnet wird?
Antw. 12.

5. Jemand kauft Pferde für 2250 Dukaten, indem er für jedes Pferd so viele Dukaten bezahlt, wie die zehnfache Anzahl der Pferde beträgt. Wieviel Pferde hat er gekauft?
Antw. 15 Pferde.

6. Jemand kauft 522 junge Bäume, welche er in zwei regelmäßige Vierecke so setzen läßt, daß bei dem einen in jeder Seite 4 Bäume mehr zu stehen kommen, als in dem anderen. Auf diese Weise konnten alle Bäume bis auf zwei eingesetzt werden. Wieviel Bäume befanden sich nun in jedem Vierecke?
Antw. In dem einen 196, im anderen 324 Bäume.

7. Ein Vater gab sein Alter und das seines Sohnes auf folgende Art an: „Als mein Sohn geboren wurde, war ich gerade 26 Jahre alt; multiplicirt man unser gegenwärtiges in Jahren ausgedrücktes Alter mit einander, so kommt die Zahl 672 heraus." Wie alt ist jeder?
Antw. Der Sohn ist 16, der Vater 42 Jahre alt.

8. Eine Vater vertheilt unter seine 8 Kinder Aepfel, den Knaben giebt er 24, den Mädchen 30 Aepfel, wobei jedes Mädchen 2 Aepfel weniger bekam als jeder Knabe. Wieviel Knaben und Mädchen waren darunter?
Antw. 3 Knaben, 5 Mädchen.

9. Auf einer Auktion ersteht Jemand für 500 Thlr. Kaffee. Wären es 5 Ctr. mehr gewesen, so würde er den Centner um 5 Thlr. wohlfeiler gekauft haben. Wieviel Ctr. waren es?
Antw. 20 Ctr.

10. Ein Vater theilt 1386 Thlr. unter seine Kinder; hätte er 2 Kinder mehr, so würde jedes 44 Thlr. weniger bekommen. Wieviel Kinder waren es? Antw. 7.

11. Mehrere Personen haben eine Summe von 180 Thlr. zu bezahlen. Da drei von ihnen kein Geld haben, muß jeder der Uebrigen 2 Thlr. mehr bezahlen, als wenn sie Alle bezahlt hätten. Wieviel Personen waren es im Ganzen?
Antw. 18 Personen.

12. Es hinterläßt Jemand an ein Armenhaus, in welchem sich 45 Personen befinden, eine Summe von 5060 Thlrn., wovon die eine Hälfte unter die Männer, die andere unter die Frauen zu gleichen Theilen gegeben werden soll. Hierbei erhält jeder Mann 5 Thlr. mehr, als jede Frau. Wieviel Männer und wieviel Frauen waren es?
Antw. 22 Männer und 23 Frauen.

13. Zwei Personen A und B reisen zugleich von einem Orte nach einem 24 Meilen entfernten ab. Da A in jeder Stunde 1 Kilometer mehr

zurücklegt, als B, so kommt er auch $\frac{3}{4}$ Stunden früher an. Wieviel Meter legt jeder in einer Stunde zurück?

Antw. A 16000, B 15000 Meter.

14. Jemand hat zwei Kapitalien ausstehen, von denen das eine ihm jährlich 30 Thlr. Zinsen bringt, während das andere, weil es um 1000 Thlr. größer ist, und er es zu einem um 1 pCt. höheren Zinsfuß ausgeliehen hat, 50 Thlr. mehr Zinsen einträgt. Wie groß sind die Kapitalien?

Antw. Das erste kann 3000 Thlr. betragen, dann ist das zweite 4000 Thlr., oder das erste ist 1000 Thlr. und dann ist das zweite 2000 Thlr.

15. Jemand hat zwei Kapitalien ausstehen. Das eine bringt ihm jährlich 300 Thlr. Zinsen, während das andere, welches um 500 Thlr. kleiner ist und zu einem um 2 pCt. geringeren Zinsfuß ausgeliehen ist, ihm im Jahre 120 Thlr. weniger einbringt. Wie groß sind die Kapitalien?

Antw. Entweder 5000 und 4500 Thlr. oder 1500 und 1000 Thlr.

16. Zehn Personen hatten in einem Gasthofe zusammen Wein getrunken. Als sie den Betrag der Rechnung bezahlen wollten, kamen mehrere Freunde hinzu, durch die sie veranlaßt wurden, weiter zu trinken. Der Betrag der dadurch entstandenen neuen Rechnung war eben so groß, als der von der früheren, und betrug ebenso viel Thaler, als Personen hinzugekommen waren. Auf Verlangen der später Gekommenen wurde der Betrag beider Rechnungen zu gleichen Theilen von allen Personen bezahlt, obgleich dadurch diejenigen, welche von Anfang an mitgetrunken hatten, ebenso viel Silbergroschen zu wenig zahlten, als jede der beiden Rechnungen Thaler betrug. Wie viel war im Ganzen zu bezahlen?

Antw. 10 Thlr.

17. Die Zahl 902 eines Zahlensystems ist gleich 76β eines anderen, die Zahl 401 des ersteren gleich der Zahl 345 des anderen. Wie groß sind die Eintheilungszahlen beider Systeme, wenn β für 11 steht?

Antw. 11 und 12.

18. Zwei Zahlen zu finden, die in dem Verhältnisse 11 : 13 stehen, und die mit einander multiplicirt, 7007 geben.

Antw. 77 und 91, und −77 und −91.

19. Drei gezahnte Räder, welche mit ihren Zähnen in einander greifen, bewegen sich ungleich geschwind um ihre Achsen. Bis das erste Rad dreimal umläuft, ist das zweite nur einmal umgegangen, und bis das dritte Rad zweimal rotirt, muß das erste 27mal rotiren. Zieht man von dem Quadrate der Anzahl der Zähne des dritten Rades das Produkt aus der Anzahl der Zähne der beiden anderen Räder ab, so erhält man 25812 als Differenz. Wieviel Zähne hat jedes Rad?

Antw. Das erste hat 12, das zweite 36 und das dritte 162 Zähne.

20. Dividirt man eine zweiziffrige zehntheilige Zahl durch das Produkt

der einzelnen Ziffern, so erhält man 2 zum Quotienten und 20 zum Rest. Wird die zu suchende Zahl von 132 subtrahirt, so stellt die Differenz eine Zahl mit denselben zwei Ziffern, aber in umgekehrter Ordnung genommen, vor. Wie heißt jene Zahl?

Antw. 84.

21. Eine vom Feinde belagerte Festung kann sich, der Berechnung nach, nur noch 12 Tage halten. Ziehen 120 Mann ab und erhält jeder täglich $\frac{5}{8}$ Pfd. Brod weniger, so kann sich die Festung 16 Tage lang halten; ebenso lange wird sie sich halten können, wenn 200 Mann abziehen und jeder täglich $\frac{3}{8}$ Pfd. Brod weniger erhält. Wie stark ist die Besatzung und wieviel Brod erhält jeder Mann täglich?

Antw. Die Besatzung ist 1200 Mann stark, und jeder derselben erhält täglich $3\frac{3}{4}$ Pfd. Brod.

22. Ein Kaufmann besitzt 2 Sorten Thee. Das Pfund der ersten kostet zwei mal so viel Pfennige, wie sie an Pfunden wiegt; das Pfund der zweiten 9 Sgr. mehr als das Pfund der ersten, und das Gewicht der ersten Sorte verhält sich zu dem der zweiten wie 4 : 1. Der Preis beider Quantitäten beträgt zusammen 238 Thlr. 15 Sgr. Wie viel Pfund hat er von jeder Sorte?

Antw. Von der ersten 180, von der zweiten 45 Pfd.

23. Auf einer Strecke von 1925 Meter macht das Vorderrad eines Wagens 165 Umläufe mehr als das Hinterrad. Vergrößert man den Umfang eines jeden Rades um $83\frac{1}{3}$ Neuzoll, so wird auf derselben Strecke das Vorderrad nur 112 Umläufe mehr als das Hinterrad machen. Welchen Umfang hat jedes der beiden Räder?

Antw. Das Vorderrad $3\frac{1}{3}$, das Hinterrad $4\frac{2}{3}$ Meter.

24. Ein mit Wasser gefüllter Behälter hat zwei Röhren. Man soll die Zeit bestimmen, in welcher der Behälter geleert würde, wenn jede der beiden Röhren einzeln offen stände. Man öffnete die erste Röhre allein und ließ durch sie $\frac{2}{5}$ der Zeit Wasser laufen, als die zweite offen sein müßte, um durch sie den Behälter zu leeren. Hierauf schloß man die erste und öffnete die zweite so lange, bis das Wasser ausgelaufen war. Hätte man beide Röhren zugleich geöffnet, so würde nur $\frac{1}{3}$ der Zeit und noch 2 Stunden zum Leeren des Gefäßes nöthig gewesen sein, als man brauchte, da beide Röhren in beschriebener Art nach einander geöffnet wurden. Dann aber würde durch die erste Röhre $1\frac{1}{2}$ mal soviel Wasser geflossen sein, als durch die zweite wirklich ausgeflossen ist.

Antw. Durch die erste Röhre in 10 und durch die zweite in 15 Stunden.

i. Aufgaben aus der Zinses-Zins-Rechnung.

(Zu §. 287—291.)

1. 69827 Thlr. stehen zu $3\frac{1}{2}$ Proc. auf Zinseszinsen, wie groß ist ihr Werth nach 10 Jahren?

Antw. 98497,77 Rthlr.

2. Wie groß ist der Werth von 2400 Thlr., die 12 Jahre lang zu 5 pCt. auf Zinseszins stehen?
   Antw. 4310,054 Thlr.
3. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes beträgt 27600 Klafter. Wenn sich derselbe jährlich um $2\frac{1}{2}$ pCt. seines jedesmaligen Holzbestandes vermehrt, wie groß wird dann der Bestand nach 40 Jahren sein?
   Antw. 74108 Klafter.
4. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes ist 1800 Klafter, wie groß war derselbe vor 30 Jahren, wenn der jährliche Zuwachs $1\frac{1}{4}$ pCt. betrug?
   Antw. 1151,576 Klafter.
5. Ein Land hatte vor 30 Jahren 4520000 Einwohner, wie groß ist jetzt die Bevölkerung, wenn die jährliche Zunahme 1,25 pCt. betrug?
   Antw. 6561278 Einwohner.
6. Wie lange stand ein Kapital von 12388 Rthlr. zu $3\frac{1}{2}$ pCt. auf Zinseszinsen, wenn es zu 22232 Rthlr. $17\frac{1}{2}$ Sgr. angewachsen ist?
   Antw. 17,00024 Jahre.
7. Wenn um Christi Geburt ein Pfennig zu 5 pCt. auf Zinseszinsen gelegt worden wäre, bis zu welchem Kapital würde derselbe am Anfange des Jahres 1870 angewachsen sein?
   Antw. 1113000000000000000000000000000000000 Rthlr.
   Bem. Um von der Größe dieser Summe einen Begriff zu geben, möge Folgendes dienen:
   446955 Preußische Thaler haben zusammengeschmolzen nur 1 Kubikmeter Inhalt; 5625000000 Kubikmeter sind aber erst gleich einer Kubikmeile; über 2693700 Kubikmeilen enthält die Erde: obgleich also weit mehr als 6772290000000000000000 Thlr. zusammengeschmolzen werden müßten, um eine Kugel zu geben, die denselben Kubikinhalt, wie die Erde hat, so würden doch 2000000 solcher Kugeln noch lange nicht genügen, um die Zinsen zu bezahlen, die obige Summe in der ersten Sekunde des Jahres 1870 bringen müßte.
8. Jemand hatte vor 15 Jahren ein Kapital von 900 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ pCt. auf Zinseszins gegeben und sich die Zinsen monatlich berechnen lassen. Wie hoch ist das Kapital angewachsen?
   Antw. 1765,357 Thlr.
9. Zu wieviel Procent muß ein Kapital auf Zinseszinsen ausgeliehen werden, wenn es sich nach 10 Jahren verdoppelt haben soll?
   Antw. Zu 7,1773 Procent.
10. Wie groß ist der künftige Werth von 5000 Rthlr. nach 40 Jahren, wenn dieselben zu 4 pCt. auf Zinseszinsen ausgeliehen sind?
    Antw. 24005,02 Rthlr.
11. Wie lange müssen 3600 Rthlr. zu 5 pCt. auf Zinseszinsen stehen, damit sie nach dieser Zeit eben so viel werth sind wie 5000 Rthlr. zu 4 pCt. nach 12 Jahren?
    Antw. 16,37935 Jahre.

12. In einer Stadt stieg innerhalb kurzer Zeit die Bevölkerung von 8000 auf 9752 Seelen, indem jährlich auf 25 Seelen eine Geburt und auf 50 Seelen nur ein Todesfall traf. In wieviel Jahren geschah diese Vermehrung?

Antw. In 10,00019 Jahren.

13. Wie hoch wächst ein Kapital von 15000 Rthlr. zu $3\frac{1}{2}$ pCt. in 12 Jahren an, wenn die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen werden?

Antw. Auf 22746,62 Rthlr.

14. Ein Land, dessen Bevölkerung in den letzten 50 Jahren jährlich um $1\frac{1}{4}$ pCt. zunahm, zählt jetzt 1129750 Einwohner; wie hoch war die Einwohnerzahl vor 50 Jahren?

Antw. 607061 Einwohner.

15. Der gegenwärtige Bestand eines Waldes beträgt 3500 Klafter; vor 12 Jahren, während welcher Zeit er geschont wurde, betrug er 2700 Klafter. Um wieviel Procent hat sich derselbe jährlich vermehrt?

Antw. Um 1,021862 pCt.

16. In wieviel Jahren wird sich bei einem jährlichen Zuwachs von 2 pCt. der Bestand eines Waldes von 4250 Klafter um 3000 Klftr. erhöhen?

Antw. In 18,06852 Jahren.

17. In wieviel Jahren verdoppelt sich ein zu 5 pCt. auf Zinseszins ausgeliehenes Kapital?

Antw. In 14,20669 Jahren.

18. Jemand will sein Haus verkaufen. A bietet ihm 3650 Rthlr. ohne Zinsen nach 8 Jahren, B 3400 Rthlr. ebenfalls ohne Zinsen nach 6 Jahren zahlbar. Welches Gebot ist das höhere, wenn die Zinseszinsen zu $3\frac{1}{2}$ pCt. berechnet werden?

Antw. Das letztere ist um 59,51 Rthlr. höher.

19. Aus einem Gefäß, welches 2 Hektoliter Essig enthält, werden 20 Liter abgefüllt und durch Wasser ersetzt. Nachdem sich Wasser und Essig vermischt, werden wieder 20 Liter abgefüllt und ebensoviel Wasser nachgegossen. Wenn dies Ab- und Zufüllen im Ganzen 9 Mal ausgeführt wird, wieviel Essig ist dann im Gefäß zurückgeblieben?

Antw. 69,73568 Liter.

20. Ein Wald, dessen Bestand gegenwärtig auf 1800 Klafter geschätzt ist, wird nach 11 Jahren haubar. Wieviel Klafter werden in dieser Zeit noch hinzuwachsen, wenn man den jährlichen Zuwachs bei 50 Klafter auf eine Klafter anschlagen kann?

Antw. Es wachsen noch 438,075 Klafter hinzu.

21. Wie groß wird die Einwohnerzahl einer Stadt, welche jetzt 20000 Einwohner zählt, nach 25 Jahren sein, wenn jährlich auf 180 Menschen 7 Geburten und 9 Sterbefälle treffen?

Antw. 15126 Seelen.

22. Ein vor 30 Jahren auf 1550 Klafter taxirter Waldbestand liefert gegenwärtig 2423 Klafter Holz. Wie stark war der jährliche Zuwachs?
Antw. 1,5032 pCt.

23. Es verleiht Jemand 260 Rthlr. auf zwei Jahre ohne Zinsen, läßt sich aber einen Schuldschein über 300 Rthlr. ausstellen. Wieviel pCt. nahm dieser, wenn die Zinseszinsen in Anschlag gebracht werden?
Antw. 7,4173 pCt.

24. 10 Rthlr. Kapital werden jährlich um 12 Rthlr. vermehrt; nach wieviel Jahren ist es Zins auf Zins zu 3 pCt. auf 100 Rthlr. angewachsen?
Antw. Nach 6,713777 Jahren.

25. Jemand hat sein Vermögen von 10000 Rthlr. zu 4 pCt. auf Zinseszinsen gegeben, nimmt aber zur Bestreitung seines Unterhaltes am Ende eines jeden Jahres 600 Rthlr. davon ab. Nach wieviel Jahren wird er sein Vermögen verbraucht haben?
Antw. Nach 28,84615 Jahren.

26. Jemand hat eine Summe Geld zu 3 pCt. auf Zinseszinsen gegeben und legt am Ende eines jeden Jahres den zehnten Theil dieser Summe hinzu. Nach wieviel Jahren wird sich auf diese Art das ursprüngliche Kapital verdoppelt haben?
Antw. Nach 7,024632 Jahren.

27. In einem Walde, der 33000 Klafter Holz enthält, und dessen Zuwachs jährlich 2 pCt. beträgt, werden zu Ende eines jeden Jahres 1400 Klafter geschlagen. Wieviel Klafter wird der Wald nach 25 Jahren noch enthalten?
Antw. 9297,45 Klafter.

28. Eine Schuld von 2500 Rthlr., welche zu $4\frac{1}{2}$ pCt. verzinst wird, soll durch 5 jährliche Einzahlungen, bei der Bank zu gleichen Summen abgetragen werden. Welche Summe ist dann jedes Mal zu zahlen, wenn die Bank nur $3\frac{1}{2}$ pCt. Zinseszinsen rechnet?
Antw. 392,7735 Rthlr.

29. Eine jährliche nachschußweise Rente von 300 Rthlr., welche 20 Jahre lang zahlbar ist, soll verkauft werden; wieviel wird man dafür erhalten, wenn der Käufer $4\frac{1}{2}$ pCt. Zinseszinsen rechnet?
Antw. 8032,318 Rthlr.

30. Ein reicher Bürger zahlt dem Magistrat 50000 Rthlr. aus, wofür ihm dieser den Stadtzoll bewilligt, der sich jährlich auf 2500 Rthlr. beläuft. Wieviel Jahre kann der Bürger Zolleinnehmer sein, wenn die Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$ pCt. gerechnet werden?
Antw. 45,58002 Jahre.

31. Jemand besitzt ein Kapital von 7980 Rthlr., welches ihm mit $4\frac{1}{2}$ pCt. verzinst wird, von demselben verbraucht er am Ende eines jeden

Jahres 435 Rthlr. Nach wieviel Jahren wird er davon 4131 Rthlr. übrig haben?

Antw. Nach 27,00003 Jahren.

32. Ein Wald, dessen gegenwärtiger Bestand 15226 Klafter beträgt, soll in 22 Jahren ausgerodet sein; wieviel Klafter wird man jährlich schlagen können, wenn auf einen jährlichen Zuwachs von 2 pCt. gerechnet wird?

Antw. 862,2673 Klafter.

33. Ein junger Mann, der 22 Jahre alt ist, schuldet 1800 Rthlr., die er nicht im Stande ist, zu bezahlen; er verspricht deshalb seinem Gläubiger, die Schuld nach 10 Jahren mit den Zinseszinsen zu 5 pCt. abzutragen, da erhält er die Nachricht, daß er am Ende seines 32sten Lebensjahres, in Folge eines Testaments, eine bedeutende Summe zu beanspruchen hat, wenn er versichern kann, daß er seit einem Jahre Niemandem etwas schuldig sei; wieviel wird er jährlich bei der Bank einzahlen müssen, um die Erbschaft antreten zu können, wenn er am Ende seines 22. Lebensjahres mit den Zahlungen anfängt und ihm 4 pCt. Zinseszinsen berechnet werden?

Antw. 244,2106 Rthlr.

Auszug
aus dem Gesetz vom 17. August 1868, betreffend die Maaß- und Gewichts-Ordnung für den Norddeutschen Bund.

Die Grundlage des Maaßes und Gewichtes ist das Meter*) oder der Stab mit decimaler Theilung und Vervielfältigung.

Es gelten folgende Maaße:

A. Längenmaaße.

Die Einheit bildet das Meter oder der Stab.
Der hundertste Theil des Meters heißt Centimeter oder Neuzoll.
Der tausendste Theil des Meters heißt Millimeter oder Strich.
Zehn Meter heißen ein Dekameter oder eine Kette.
Tausend Meter heißen ein Kilometer.
Als Entfernungsmaaß dient die Meile von 7500 Meter.

B. Flächenmaaße.

Die Einheit bildet das Quadratmeter oder der Quadratstab.
Hundert Quadratmeter heißen das Ar.**)
Zehntausend Quadratmeter heißen das Hektar.***)

C. Körpermaaße.

Die Grundlage bildet das Kubikmeter oder der Kubikstab.
Die Einheit ist der tausendste Theil des Kubikmeters und heißt das Liter oder die Kanne.
Das halbe Liter heißt ein Schoppen.
Hundert Liter oder der zehnte Theil des Kubikmeters heißt ein Hektoliter oder ein Faß.
Fünfzig Liter sind ein Scheffel.

D. Gewichte.

Die Einheit des Gewichts bildet das Kilogramm****) (gleich zwei Pfund).
Das Kilogramm wird in 1000 Gramm getheilt mit decimalen Unterabtheilungen.
Zehn Gramm heißen ein Dekagramm oder ein Neuloth.

*) Das französische Meter soll der zehnmillionste Theil eines Quadranten des Erdmeridians von Paris sein und ist durch Gradmessungen bestimmt worden.

**) Das Ar ist also gleich einem Quadrat, dessen Seite gleich 10 Meter ist.

***) Das Hektar ist gleich einem Quadrat, dessen Seite gleich 100 Meter ist.

****) Das Kilogramm ist das Gewicht eines Liter destillirten Wassers von größter Dichtigkeit.

Der zehnte Theil eines Gramms heißt ein Decigramm, der tausendste ein Milligramm.

Ein halbes Kilogramm heißt ein Pfund.

50 Kilogramm oder 100 Pfund heißen ein Centner.

1000 Kilogramm oder 2000 Pfund heißen eine Tonne.

Diese Maaß- und Gewichts-Ordnung tritt mit dem 1. Januar 1872 in Kraft.

Die Anwendung der dieser Maaß- und Gewichts-Ordnung entsprechenden Maaße und Gewichte ist bereits vom 1. Januar 1870 an gestattet.

Bezeichnungen.

1 Meter wird bezeichnet mit m;	1 Gramm mit g.
1 Decimeter „ „ „ dm;	1 Decigramm mit dg.
1 Centimeter „ „ „ cm;	1 Centigramm mit cg.
1 Millimeter „ „ „ mm;	1 Milligramm mit mg.
1 Dekameter „ „ „ Dm;	1 Dekagramm mit Dg.
1 Hektometer „ „ „ Hm;	1 Hektogramm mit Hg.
1 Kilometer „ „ „ Km;	1 Kilogramm mit Kg.

Für die Flächen- und Körpermaaße sind dieselben Bezeichnungen beibehalten, nur soll bei den ersteren das Zeichen □, bei den letzteren Kb. vorgesetzt werden.

So bedeutet z. B. 1 □ mm ein Quadratmillimeter,
1 Kb. Km ein Kubikkilometer.

Der Neuzoll wird bezeichnet mit Nzll.
Das Neuloth „ „ „ Nlth.
Der Schoppen „ „ „ Schpp.
Der Neuscheffel „ „ „ Nschffl.

Im Uebrigen sind alle bisher eingeführten und bekannten Bezeichnungen für sämmtliche Maaße, Gewichte und Münzen beibehalten worden.

Zu Reduktionen auf andere Einheiten merke man:

a. Längenmaaße.

		Kette	Stab		Neuzoll	Strich
1Km =	10Hm =	100Dm =	1000m =	10000dm =	100000cm =	1000000mm
	1 „ =	10 „ =	100 „ =	1000 „ =	10000 „ =	100000 „
		1 „ =	10 „ =	100 „ =	1000 „ =	10000 „
			1 „ =	10 „ =	100 „ =	1000 „
				1 „ =	10 „ =	100 „
					1 „ =	10 „

b. Flächenmaaße.

	Hektar	Ar	Quadratstab
1 □ Km =	1 00 □ Hm =	1 00 00 □ Dm =	1 00 00 00 □ m
	1 „ =	1 00 „ =	1 00 00 „
		1 „ =	1 00 „

Quadratstab		Quadratneuzoll	Quadratstrich
1 □ m =	1 00 □ dm =	1 00 00 □ cm =	1 00 00 00 □ mm.
1 „ =	1 00 „ =	1 00 00 „	
	1 „ =	1 00 „	